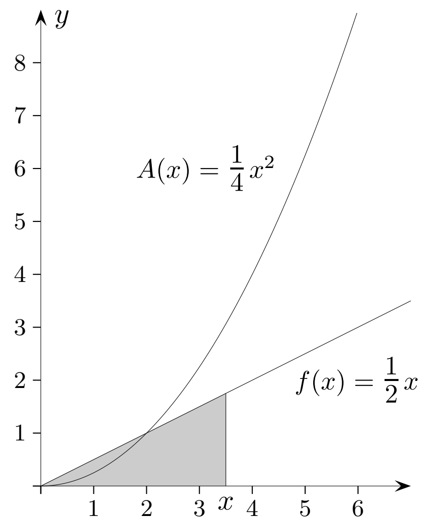
Integralrechnung

Die Inhaltsfunktion $A(x)$ gibt für jedes x den Inhalt der Fläche unter dem Graphen in den Grenzen von 0 bis x an.

Für die Inhaltsfunktion $A(x)$ gilt: $A'(x) = f(x)$

Beispiele:

$f(x) = 3$	$A(x) = 3x$
$f(x) = x$	$A(x) = \dfrac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2$	$A(x) = \dfrac{x^3}{3}$
$f(x) = x^3 - 2x + 4$	$A(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^2 + 4x$



Beachte die Schreibweise für die Flächenberechnung: $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

A ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen in den Grenzen von a bis b.

1. Bestimme den Inhalt der Fläche unter dem Graphen in den angegebenen Grenzen.
   a) $f(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 3$
   b) $f(x) = x^3 + 1, \quad a = 0, \quad b = 2$
   c) $f(x) = x^4 + x, \quad a = 1, \quad b = 2$
   d) $f(x) = x^2 + 2, \quad a = -2, \quad b = 2$

2. Bestimme den Inhalt der Fläche, die der Graph mit der x-Achse einschließt.
   a) $f(x) = 4 - x^2$
   b) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$
   c) $f(x) = x^3 + 2x^2$

3. Bestimme den Inhalt der Fläche, die die beiden Graphen miteinander einschließen.
   a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 5x$
   b) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x + 3$
   c) $f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = 2x + 2$
   d) $f(x) = -x^2 + 2x + 3, \quad g(x) = -x + 3$

Integralrechnung Lösungen

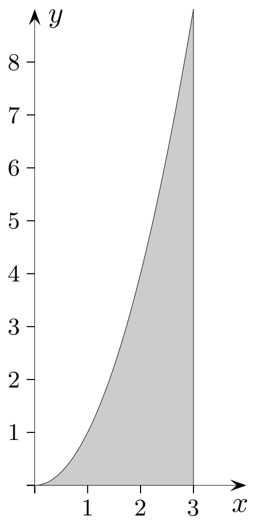
1. a) $A = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \;\ldots\; = 9$

b) $A = \int_0^2 (x^3+1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_0^2 = \;\ldots\; = 6$

c) $A = \int_1^2 (x^4+x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \;\ldots\; = \frac{77}{10}$

d) $A = 2\int_0^2 (x^2+2)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^2 = \;\ldots\; = \frac{40}{3}$

1. a)



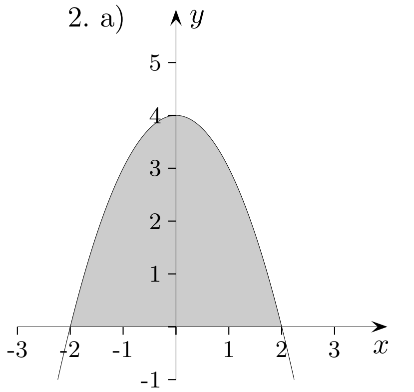
2. a) $A = 2\int_0^2 (4-x^2)\,dx = 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \;\ldots\; = \frac{32}{3}$

b) $A = \int_{-1}^6 (-x^2+5x+6)\,dx =$

$$\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^6 = \;\ldots\; = 57\frac{1}{6}$$

c) $A = \int_{-2}^0 (x^3+2x^2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^0 = \;\ldots\; = \frac{4}{3}$

2. a)



3. a) $A = \int_0^5 (5x-x^2)\,dx = \;\ldots\; = 20\frac{5}{6}$

b) $A = \int_{-1}^3 (2x+3-x^2)\,dx = \;\ldots\; = 10\frac{2}{3}$

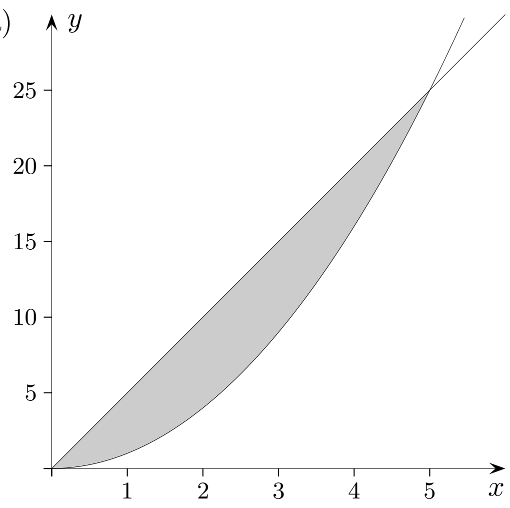
c) $A = \int_0^2 ((2x+2)-(x^2+2))\,dx =$

$$\int_0^2 (2x-x^2)\,dx = \;\ldots\; = \frac{4}{3}$$

d) $A = \int_0^3 ((-x^2+2x+3)-(-x+3))\,dx =$

$$\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx = \;\ldots\; = \frac{9}{2}$$

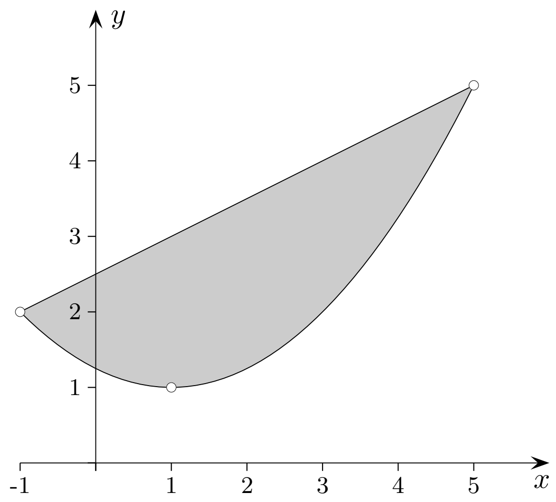
3. a)



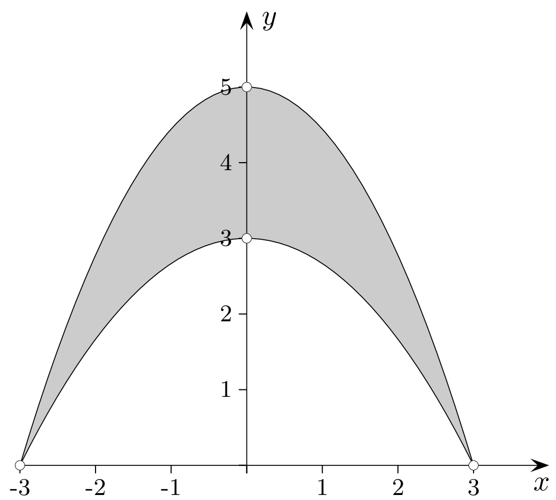
Integralrechnung

4. Bestimme den Inhalt der gefärbten Fläche.
   Die Koordinaten der eingezeichneten Parabelpunkte sind ganzzahlig.

a)

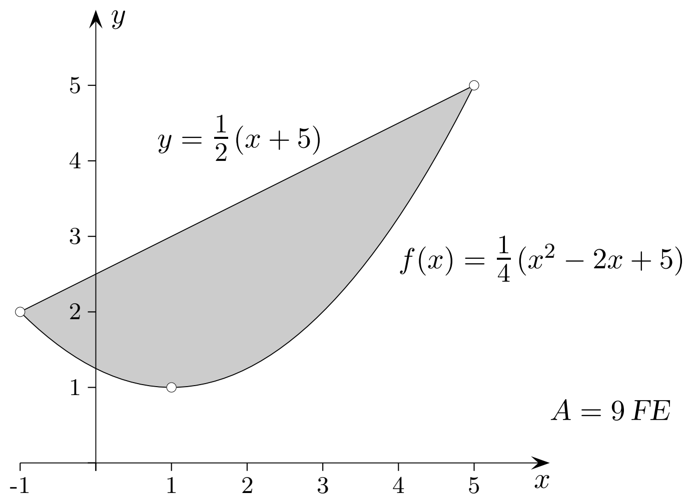


b)



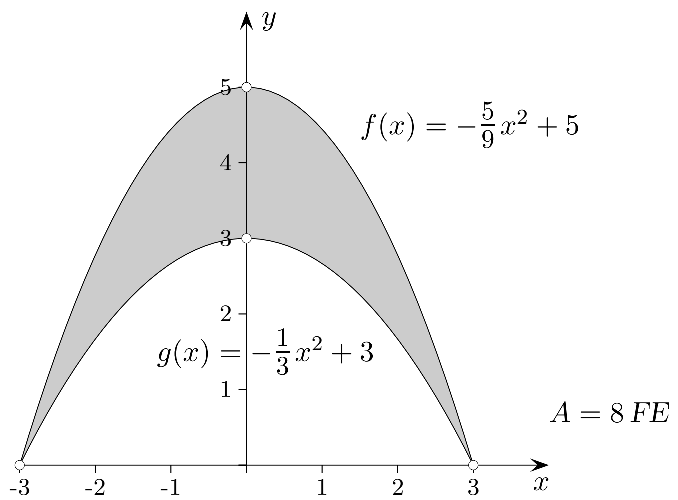
4. Bestimme den Inhalt der gefärbten Fläche.
   Die Koordinaten der eingezeichneten Parabelpunkte sind ganzzahlig.

a)

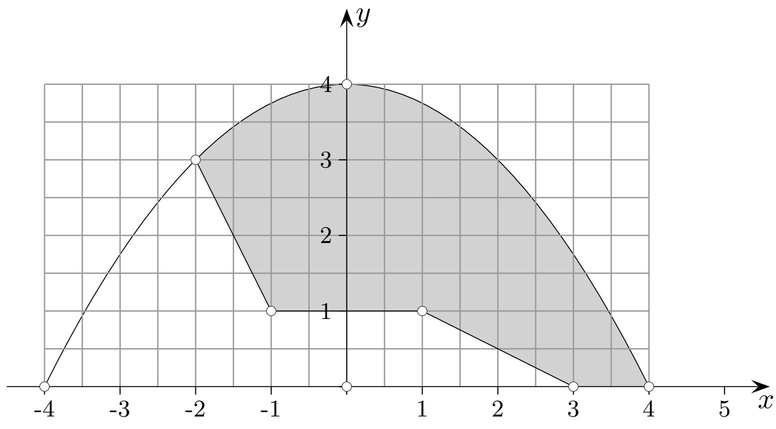


Die Geradengleichung muss nicht aufgestellt werden.

b)

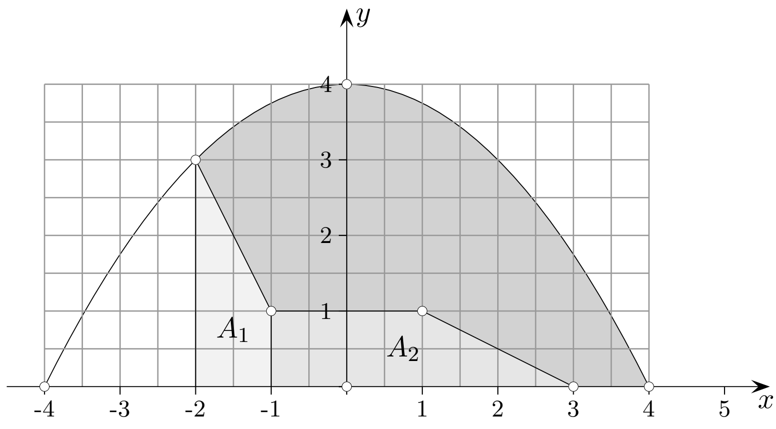


Integralrechnung



Bestimme den Inhalt der grauen Fläche.
Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.

Integralrechnung



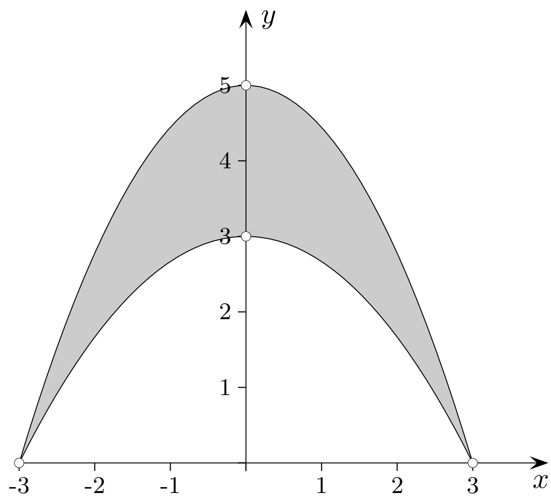
Bestimme den Inhalt der grauen Fläche.
Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.

$$f(x) = 4 - ax^2,\ f(4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

$$A = \int_{-2}^{4} f(x)\,dx - A_1 - A_2 = 18 - 2 - 3 = 13 \text{ [FE]}$$

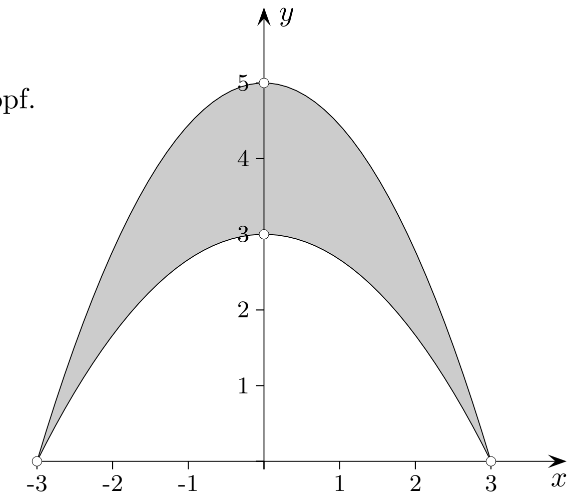
Integralrechnung

Bestimme den Inhalt der gefärbten Fläche nun im Kopf.

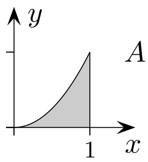


Integralrechnung

Bestimme den Inhalt der gefärbten Fläche nun im Kopf.
Erläutere.

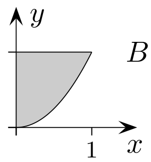


a)



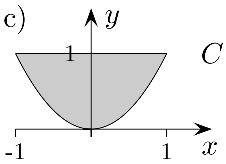
$A = \frac{1}{3}$

b)



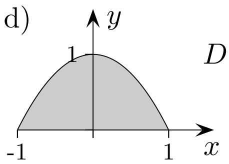
$B = \frac{2}{3}$

c)



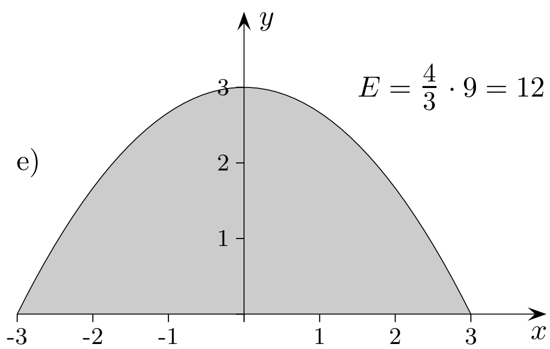
$C = \frac{4}{3}$

d)



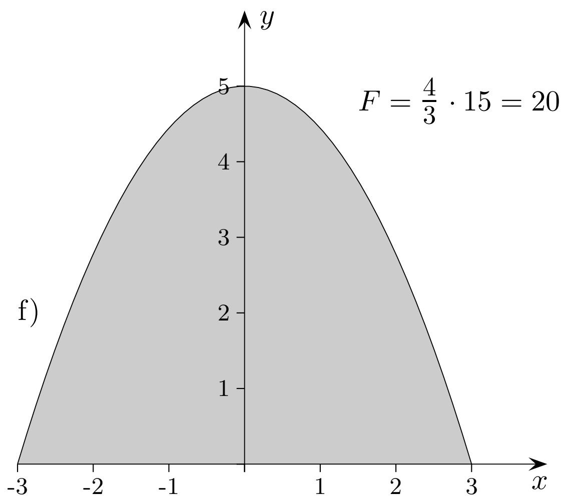
$D = \frac{4}{3}$

e)



$E = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$

f)



$F = \frac{4}{3} \cdot 15 = 20$

$G = 20 - 12 = 8$