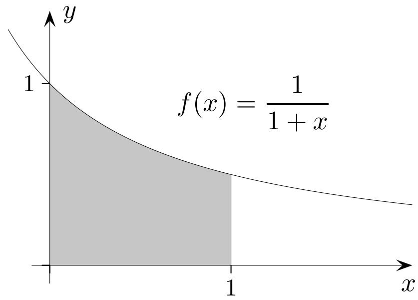
Das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$



Wenn die Funktion f z.B. die Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit erfasst, so entspricht dem Flächeninhalt der zurückgelegte Weg.
Da wir die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ nicht integrieren können, nähern (approximieren) wir sie immer besser durch Polynome an, in der Hoffnung, den exakten Flächeninhalt doch noch ermitteln zu können.

1. Zunächst soll die Funktion $f(x)$ ganz grob durch eine lineare Funktion $g(x) = ax + b$ approximiert werden.

   a) $g(0) = 1$

   b) $g(1) = \frac{1}{2}$

   Dies ergibt das Gleichungssystem:
   $$\begin{aligned} b &= 1 \\ a+b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Aus diesen Gleichungen folgt: $a = -\frac{1}{2}$

   Die Funktion lautet daher: $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ und es ist $\displaystyle\int_0^1 (-\frac{1}{2}x + 1)\,dx = \frac{3}{4}$

2. Nun soll die Funktion $f(x)$ durch ein Polynom 2. Grades $g(x) = ax^2 + bx + c$ approximiert werden.

   a) $g(0) = 1$

   b) $g(1) = \frac{1}{2}$

   c) $g'(0) = -1$

   Dies ergibt das Gleichungssystem:
   $$\begin{aligned} c &= 1 \\ a+b+c &= \frac{1}{2} \\ b &= -1 \end{aligned}$$

   beachte: $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

   Aus diesen Gleichungen folgt: $a = \frac{1}{2}$

   Die Funktion lautet daher: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ und es ist $\displaystyle\int_0^1 (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)\,dx = \frac{2}{3}$

3. Die nächstbesseren Näherungen durch Polynome 3. und 4. Grades lauten:

   $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - x + 1$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

4. Wir vermuten, dass gilt: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ ...$

   Dies können wir durch eine Polynomdivision bestätigen.

5. Damit erhalten wir:
   $$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx &= \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx \ - \ ... \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ ... = 0{,}6931\ ... \end{aligned}$$