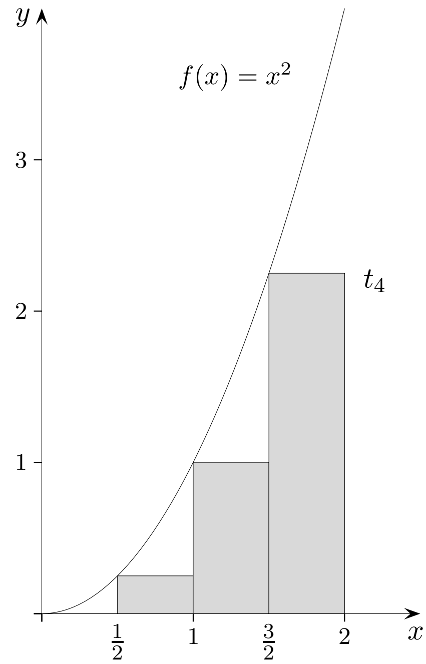
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir beginnen mit der Betrachtung von Treppenfunktionen t_n, die eine gegebene Funktion f approximieren, und deren Inhaltsfunktionen T_n. Die Werte $T_n(x)$ geben für jedes x den exakten Flächeninhalt unter dem Graphen von t_n in den Grenzen von 0 bis x an. Die Graphen der Inhaltsfunktionen können in diesen Fällen recht einfach gezeichnet werden, da der jeweilige lineare Zuwachs der Funktionswerte auf einem Teilintervall dem Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks entspricht.



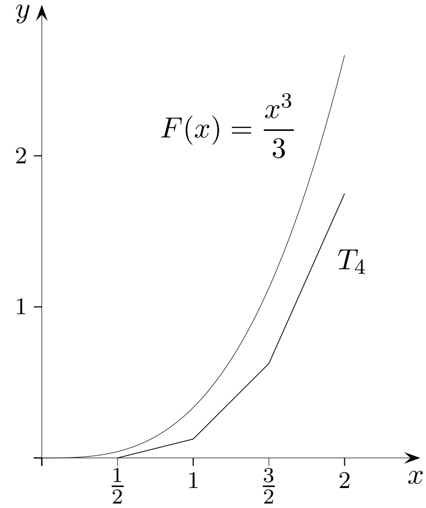
Für konstante Funktionen gilt die Beziehung $I'(x) = f(x)$, wobei $I(x)$ die Inhaltsfunktion ist (z. B. sei $f(x) = 2$, dann ist $I(x) = 2x$). die Beziehung überträgt sich auf Treppenfunktionen t_n, für die, von den Enden der Teilintervalle abgesehen, auch gilt:

$$T_n'(x) = t_n(x)$$

Für die Erarbeitung dieser Zusammenhänge ist es hilfreich, einige Funktionswerte der stückweise definierten Funktionen t_n und T_n auszurechnen. Für die Funktionen im Beispiel gilt:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$t_4(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$T_4(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{4}$

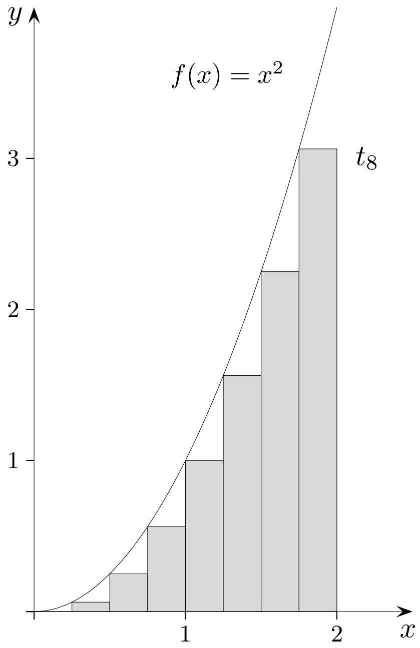


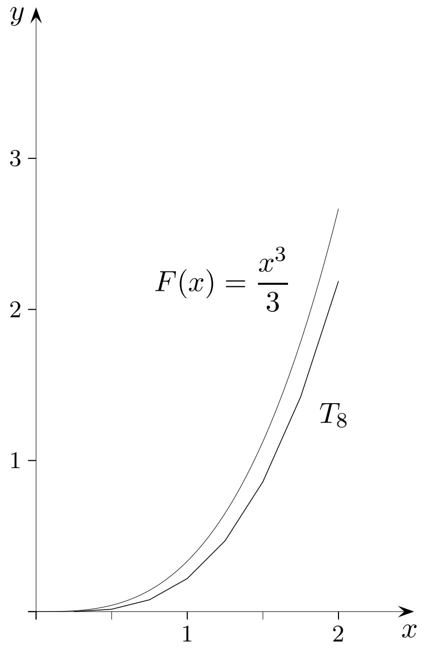
Streben die Treppenfunktionen t_n gegen die Funktion f, so scheinen die Inhaltsfunktionen T_n, deren Ableitung die t_n sind, sich einer Funktion F zu nähern, deren Ableitung f ist.
Ist der Nachweis der Konvergenz der T_n gegen F erbracht, kann statt der näherungsweisen Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f mit Hilfe der Funktionen T_n eine exakte Berechnung mit F erfolgen.

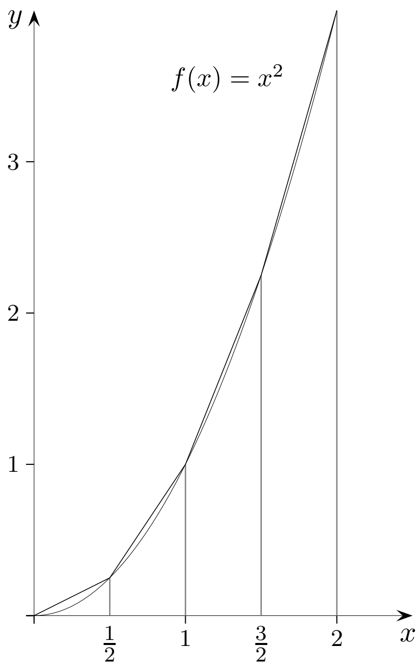
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

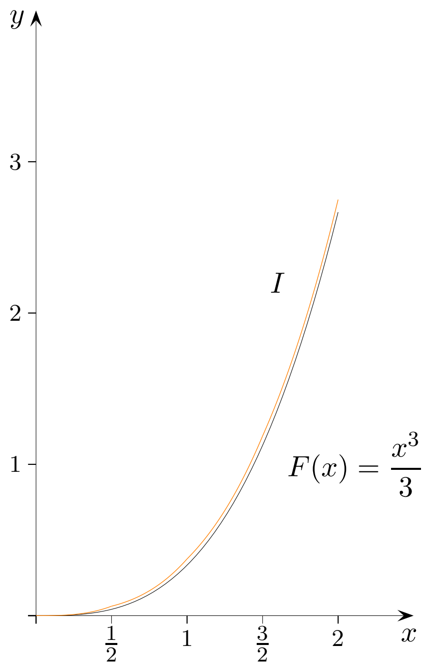
Schon bei einer Verdopplung der Teilintervalle ist erkennbar, dass sich die Funktionen T_n einer bestimmten Funktion annähern. Zusammengefasst haben wir folgende Situation:

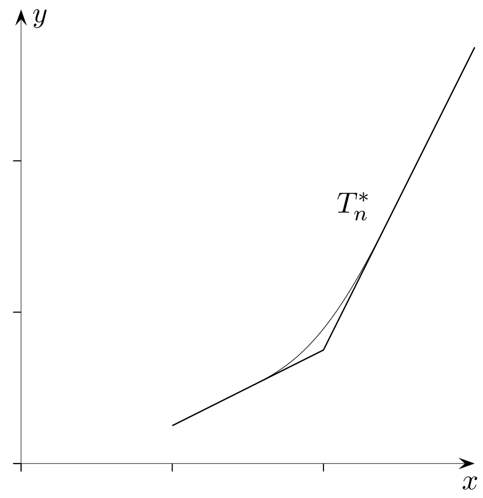
1. $t_n \to f$
2. $T_n \to F$
3. $T_n' = t_n$
4. $F' = f$ (Vermutung)









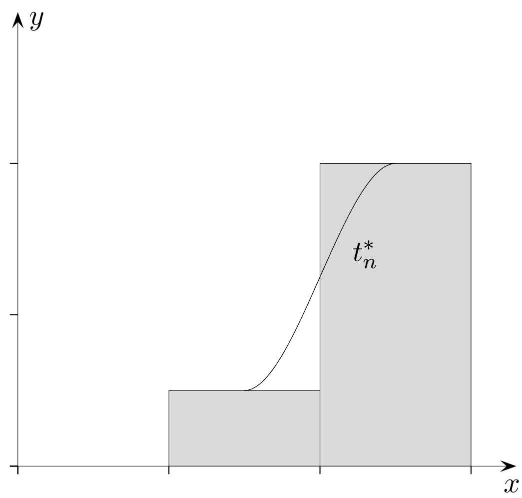


Daher glätten wir die Funktionen T_n. Wir benötigen lediglich die Existenz der nun differenzierbaren Funktionen T_n^* und die Eigenschaft, dass die Werte der Ableitung t_n^* zwischen den Funktionswerten der Treppenfunktionen t_n liegen. Daher sind die Funktionen t_n^* in gleicher Weise wie die Treppenfunktionen t_n geeignet, f zu approximieren.

Mit der Dreiecksungleichung, einer Ergänzung, wobei $F(a) = T_n^*(a) = 0$ zu beachten ist, und dem Mittelwertsatz, angewandt auf die Funktion $F(x) - T_n^*(x)$, gelingt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&| \; F(x) - T_n^*(x) \; | \\
&\qquad = \; | \; (F(x) - T_n^*(x)) - (F(a) - T_n^*(a) \; | \\
&\qquad \leq \; | \; f(\xi) - t_n^*(\xi) \; || \; x - a \; | \\
&\qquad \leq \; | \; f(\xi) - t_n^*(\xi) \; || \; b - a \; | \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{mit } \xi \; \in \; [a, \; b]
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung ist alles Erforderliche ersichtlich.



Approximieren die Funktionen t_n^* die Funktion f, strebt also für $n \to \infty$ der maximale Abstand der Funktionswerte auf $[a, \; b]$ gegen null, so kann der Ausdruck $| \; f(\xi) - t_n^*(\xi) \; |$ für entsprechendes n beliebig klein gewählt werden. Die Funktionen T_n^* streben daher sogar gleichmäßig gegen F.

$T_n^*(x)$ und $T_n(x)$ stimmen jeweils in der Mitte der Teilintervalle überein, die maximale Abweichung im Bereich zweier aufeinanderfolgender Mitten wird durch den Zuwachs von $T_n(x)$ auf diesem Intervall begrenzt. Der Zuwachs ergibt sich als Summe der Inhalte zweier benachbarter Rechteckhälften. Die Funktionen $T_n(x)$ streben daher auch gegen F .