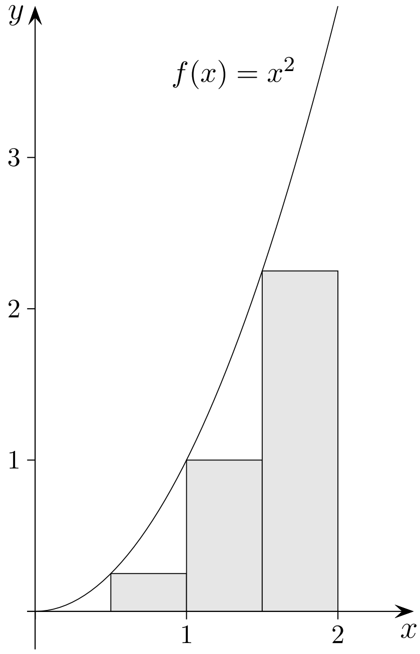
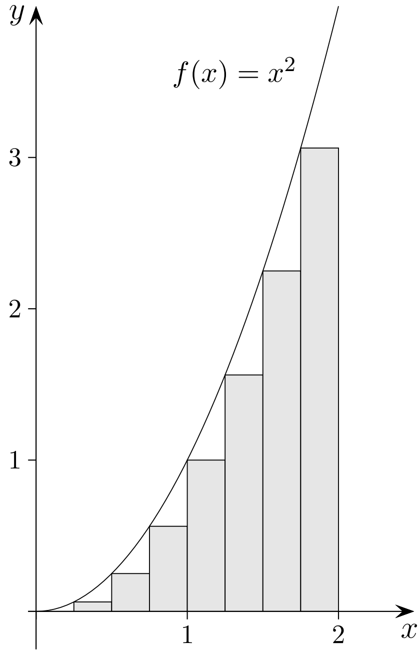
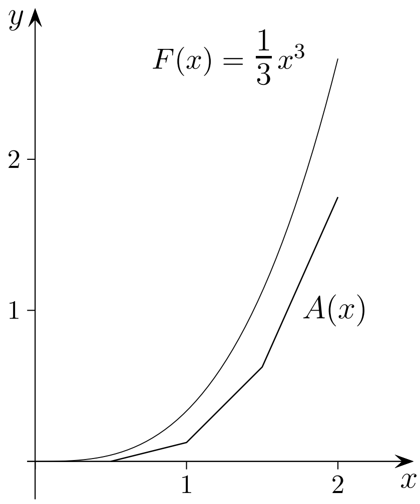
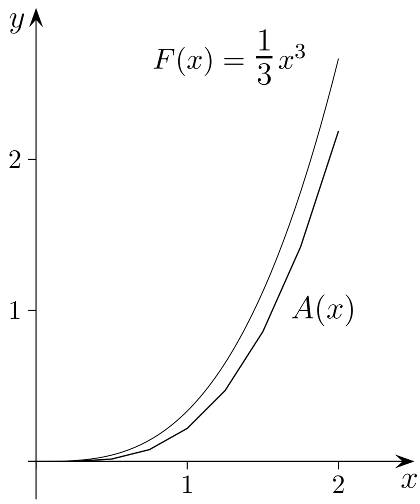
Fragen zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung









1. Welchen Sinn haben die Streifen?
2. Die Annäherung mit Rechtecken ist doch ungenau. Wieso kann auf diesem Wege der Flächeninhalt exakt ermittelt werden?
3. Was gibt die obige Inhaltsfunktion $A(x)$ an?
4. Was gilt für die Ableitung der Inhaltsfunktion?
5. Warum kann die Inhaltsfunktion an den Stellen, an denen jeweils zwei Rechtecke aneinanderstoßen, nicht abgeleitet werden?
6. Betrachten wir eine Folge von Rechteckunterteilungen, bei denen die Breite der Rechtecke gegen null strebt. Was gilt für die zugehörige Folge der Inhaltsfunktionen?

Fragen zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1. Welchen Sinn haben die Streifen?
2. Die Annäherung mit Rechtecken ist doch ungenau. Wieso kann auf diesem Wege der Flächeninhalt exakt ermittelt werden?
3. Was gibt die obige Inhaltsfunktion $A(x)$ an?
4. Was gilt für die Ableitung der Inhaltsfunktion?
5. Warum kann die Inhaltsfunktion an den Stellen, an denen jeweils zwei Rechtecke aneinanderstoßen, nicht abgeleitet werden?
6. Betrachten wir eine Folge von Rechteckunterteilungen, bei denen die Breite der Rechtecke gegen null strebt. Was gilt für die zugehörige Folge der Inhaltsfunktionen?

1. *Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen wird durch eine Unterteilung mit Rechtecken angenähert.*

2. *Wir betrachten eine Folge von Rechteckunterteilungen, bei denen die Breite der Rechtecke gegen null strebt. Die Fläche unter dem Graphen wird durch die Rechteckunterteilungen immer besser ausgeschöpft.*

3. *Die Inhaltsfunktion $A(x)$ gehört zu der Treppenfunktion, die durch die Rechteckunterteilung gegeben ist. Die Inhaltsfunktion gibt den Inhalt der Fläche unter der Treppenfunktion von 0 bis x an.*

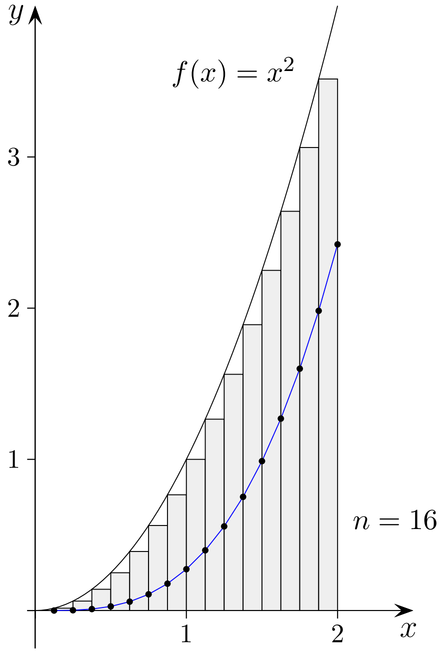
4. *Die Ableitung der Inhaltsfunktion $A(x)$ ist die Treppenfunktion (ausgenommen an den Stellen, an denen jeweils zwei Rechtecke aneinanderstoßen).*

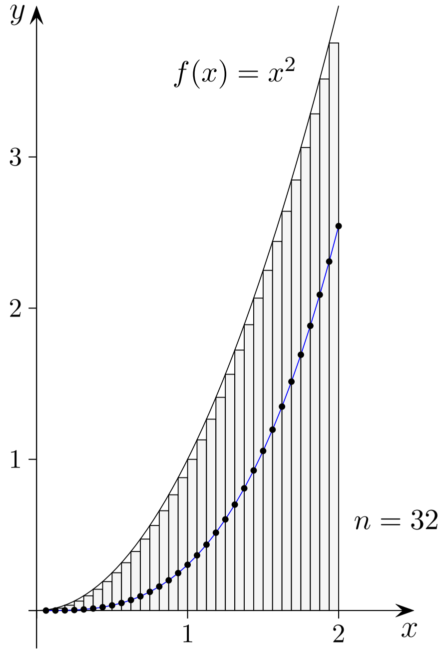
5. *An diesen Stellen (Spitzen) existiert keine (eindeutige) Tangente.*

6. *Die zugehörige Folge der Inhaltsfunktionen strebt gegen eine Funktion, deren Ableitung f ist, einer Stammfunktion von f also.*

7. *Die Ableitungen der Inhaltsfunktionen (die Treppenfunktionen also) streben gegen f. Daher streben die Inhaltsfunktionen gegen eine Funktion, deren Ableitung f ist.*

Flächeninhalt als Grenzwert

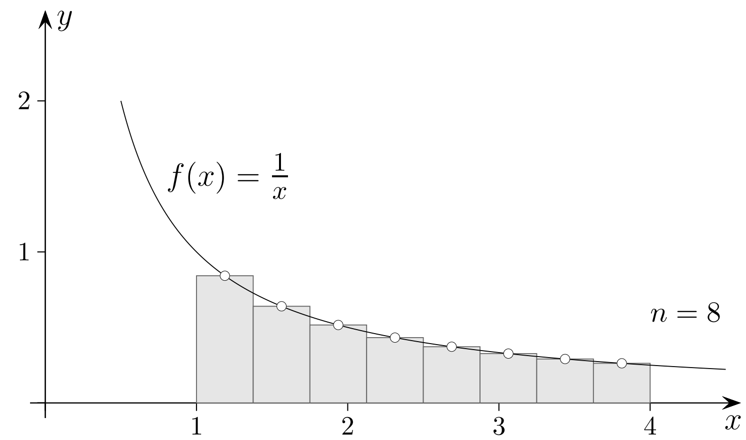




$$
\begin{aligned}
s_8 &= 2{,}1875 \\
s_{16} &= 2{,}421875 \\
s_{32} &= 2{,}54296875 \\
s_{64} &= 2{,}604492187\ldots \\
s_{128} &= 2{,}635498046\ldots \\
s_{256} &= 2{,}651062011\ldots \\
s_{512} &= 2{,}658859252\ldots \\
s_{1024} &= 2{,}662761688\ldots \\
s_{2048} &= 2{,}664713859\ldots \\
s_{4096} &= 2{,}665690183\ldots \\
s_{8192} &= 2{,}666178405\ldots \\
s_{16384} &= 2{,}666422531\ldots \\
s_{2^{15}} &= 2{,}666544597\ldots \\
s_{2^{16}} &= 2{,}666605630\ldots \\
\ldots \\
s_{2^{20}} &= 2{,}666662854\ldots \\
s_{2^{30}} &= 2{,}666666662\ldots
\end{aligned}
$$

s_n ist Inhaltssumme der Rechtecksflächen für n Unterteilungen (Untersumme) des Intervalls $[0; 2]$. Die Folge erzeugt den Grenzwert $\frac{8}{3}$. Mit größer werdendem n werden immer weitere gültige Nachkommastellen enthüllt.

Flächeninhalt als Grenzwert

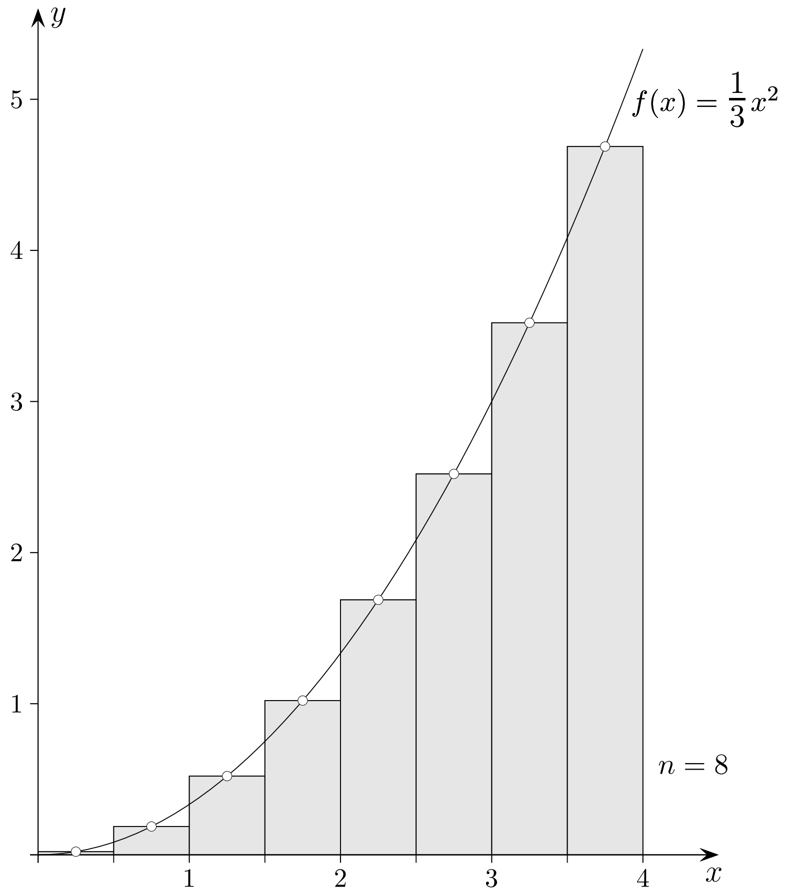


$$
\begin{aligned}
s_{8} &= 1{,}3809354510\ldots \\
s_{16} &= 1{,}3849298860\ldots \\
s_{32} &= 1{,}3859515968\ldots \\
s_{64} &= 1{,}3862085654\ldots \\
s_{128} &= 1{,}3862729056\ldots \\
s_{256} &= 1{,}3862889968\ldots \\
s_{512} &= 1{,}3862930200\ldots \\
s_{1024} &= 1{,}3862940258\ldots \\
s_{2048} &= 1{,}3862942773\ldots \\
s_{4096} &= 1{,}3862943401\ldots \\
s_{8192} &= 1{,}3862943558\ldots \\
s_{16384} &= 1{,}3862943598\ldots \\
s_{32768} &= 1{,}3862943607\ldots \\
\ldots &
\end{aligned}
$$

s_n ist Inhaltssumme der Rechtecksflächen für n Unterteilungen des Intervalls $[1; 4]$.
Die Folge erzeugt den Grenzwert $\ln(4)$. Es gilt $e^{\ln(4)} = 4$ (siehe: Weg zur e-Funktion).
Mit größer werdendem n werden immer weitere gültige Nachkommastellen enthüllt.
Gleichwohl ist von einer irrationalen Zahl stets nur ein endliches Anfangsstück sichtbar.

$$\ln(4) = 1{,}38629436111989061883446424\ldots$$

Flächeninhalt als Grenzwert

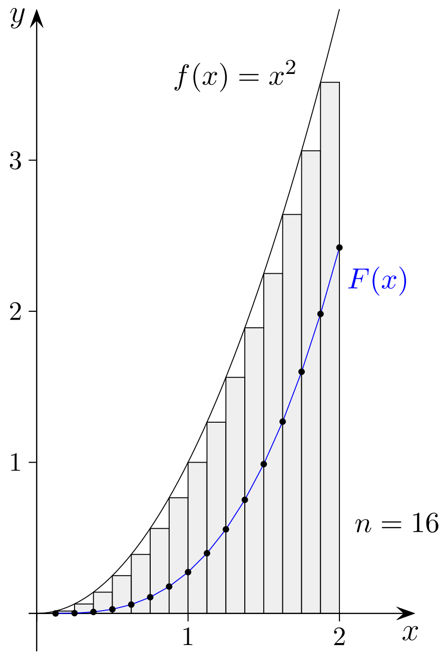


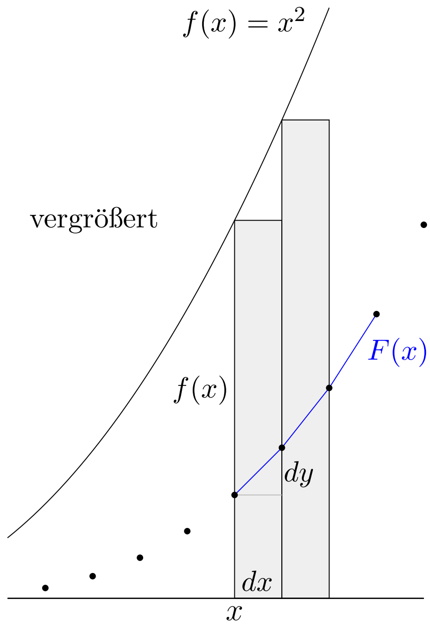
$$
\begin{aligned}
s_8 &= 7{,}0833333\ldots \\
s_{16} &= 7{,}1041666\ldots \\
s_{32} &= 7{,}1093750\ldots \\
s_{64} &= 7{,}1106770\ldots \\
s_{128} &= 7{,}1110026\ldots \\
s_{256} &= 7{,}1110839\ldots \\
s_{512} &= 7{,}1111043\ldots \\
s_{1024} &= 7{,}1111094\ldots \\
s_{2048} &= 7{,}1111106\ldots \\
s_{4096} &= 7{,}1111110\ldots \\
\longrightarrow &\quad 7{,}1111111\ldots
\end{aligned}
$$

s_n ist Inhaltssumme der Rechtecksflächen für n Unterteilungen.

Die Folge erzeugt den Grenzwert $\frac{64}{9}$.

7,1111111111111111111…





Die Funktion $F(x)$ (Graph blau gefärbt) gibt die Summe der Rechteckinhalte bis zur Stelle x an, Beginn bei null. Mit ihr kann die Fläche unterhalb des Graphen von f näherungsweise ermittelt werden. Die Rechteckbreite dx kann so klein gewählt werden, dass der Näherungsfehler vernachlässigbar ist. $F(x)$ lässt sich (fast immer) einfach ermitteln. Die Höhendifferenz zweier benachbarter Punkte beträgt $dy = f(x) \cdot dx$. Die Ableitung von $F(x)$ ist somit
$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x) \cdot dx}{dx} = f(x)$.
$F(x)$ erhalten wir daher durch Aufleitung von f.

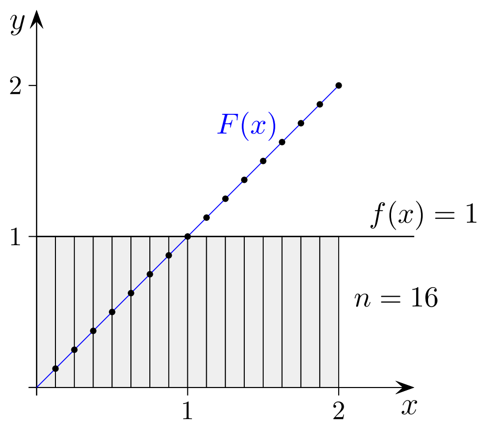
Fläche A unterhalb des Graphen von f in den Grenzen von 0 bis 2 (Integralzeichen $\int$ von Leibniz):

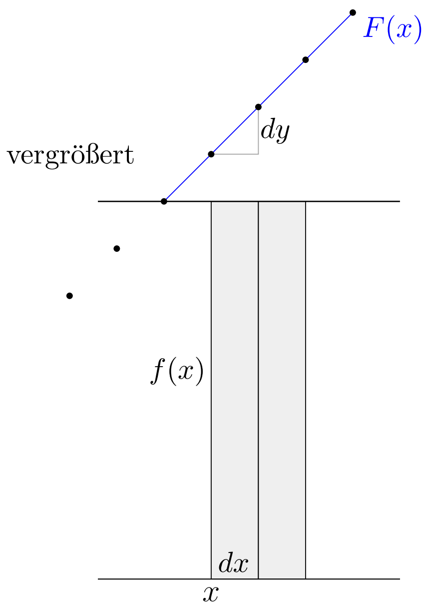
$$A = \int\limits_0^2 f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_0^2 = F(2) - F(0), \quad F(x) \text{ Aufleitung,} \qquad \text{in Anlehnung an } \sum f(x)\,dx$$

lat. summa

Des Pudels Kern

Anhand dieses einfachsten Beispiels mit $f(x) = 1$ soll die Idee der Integralrechnung verdeutlicht werden.





Die Funktion $F(x)$ (Graph blau gefärbt) gibt die Summe der Rechteckinhalte bis zur Stelle x an, Beginn bei null. Mit ihr kann die Fläche unterhalb des Graphen von f ermittelt werden. Die Rechteckbreite ist dx.
$F(x)$ lässt sich (fast immer) einfach ermitteln. Die Höhendifferenz zweier benachbarter Punkte beträgt $dy = f(x) \cdot dx$. Die Ableitung von $F(x)$ ist somit
$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x) \cdot dx}{dx} = f(x)$.
$F(x)$ erhalten wir daher durch Aufleitung von f.

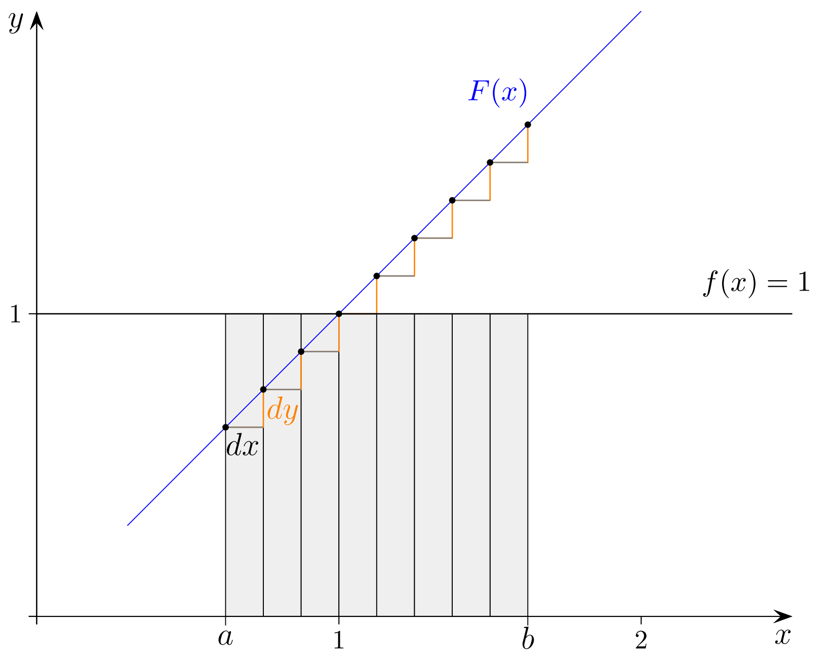
Fläche A unterhalb des Graphen von f in den Grenzen von 0 bis 2 (Integralzeichen $\int$ von Leibniz):

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_0^2 = F(2) - F(0), \quad F(x) \text{ Aufleitung,} \qquad \text{in Anlehnung an } \sum f(x)\,dx$$

lat. summa

Geänderte Blickrichtung

Anhand dieses einfachsten Beispiels mit $f(x) = 1$ soll die Idee der Integralrechnung verdeutlicht werden.



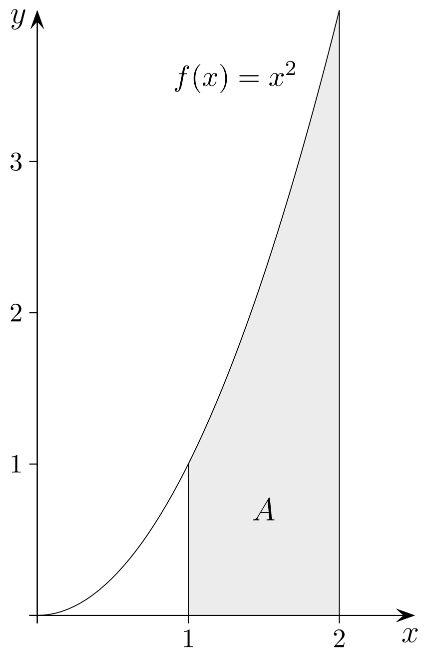
Die Funktion $F(x)$ (Graph blau gefärbt) sei die Aufleitung von f, d. h. an jeder Stelle ist $F'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x)$. Dann gilt für jedes Steigungsdreieck $dy = f(x)\,dx$, wobei $f(x)\,dx$ jeweils der Inhalt eines Rechtecks mit der Breite dx und der Höhe $f(x)$ ist. Um den Inhalt der Fläche unterhalb des Graphen von f in den Grenzen von a bis b zu ermitteln, können die Inhalte der Rechtecke addiert werden, indem die einzelnen dy addiert werden und das erfolgt einfach mit der Differenz $F(b) - F(a)$.

Fläche A unterhalb des Graphen von f in den Grenzen von a bis b (Integralzeichen $\int$ von Leibniz):

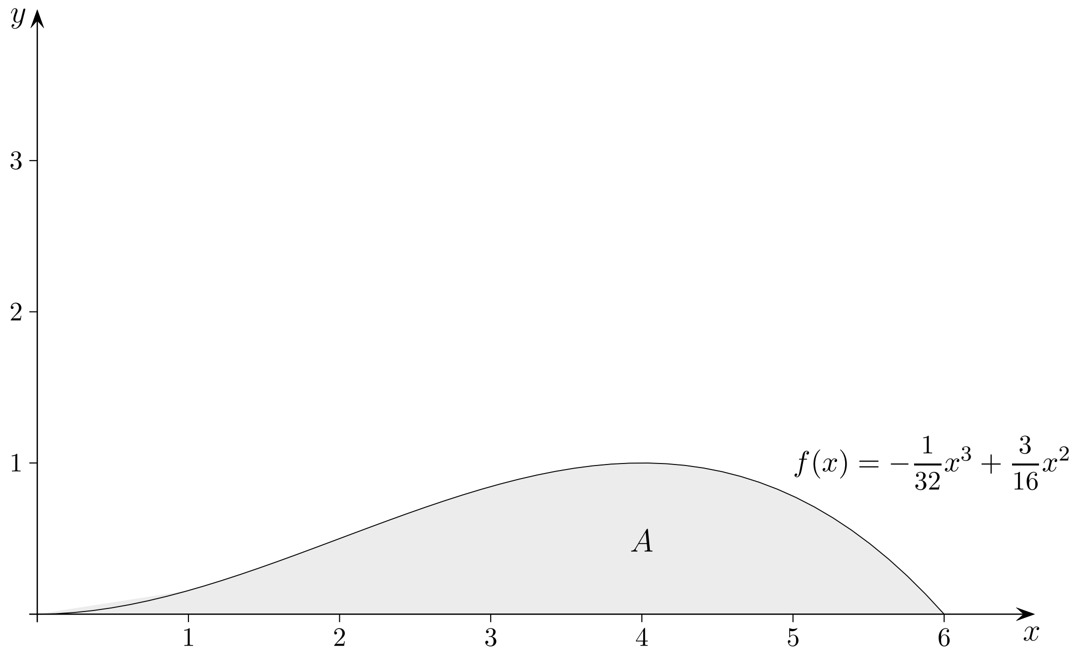
$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a), \quad F(x) \text{ Aufleitung,} \qquad \text{in Anlehnung an } \sum f(x)\,dx$$

lat. summa

Flächenberechnung

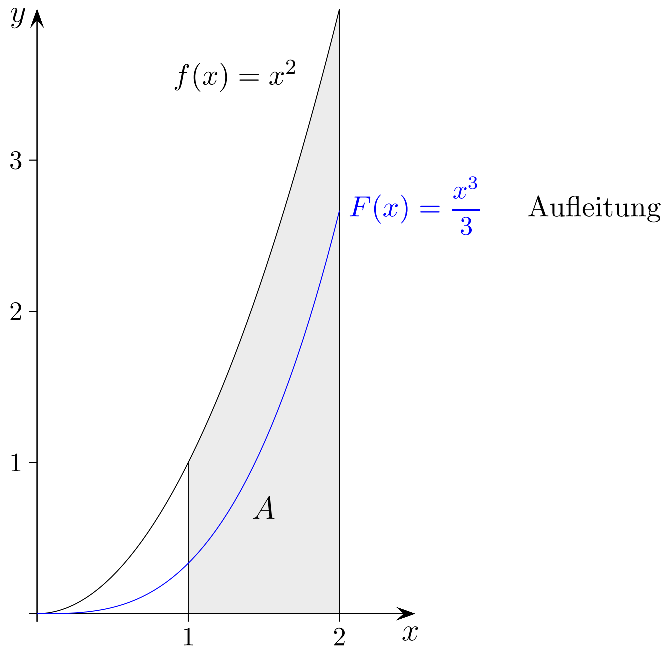


$A = ?$



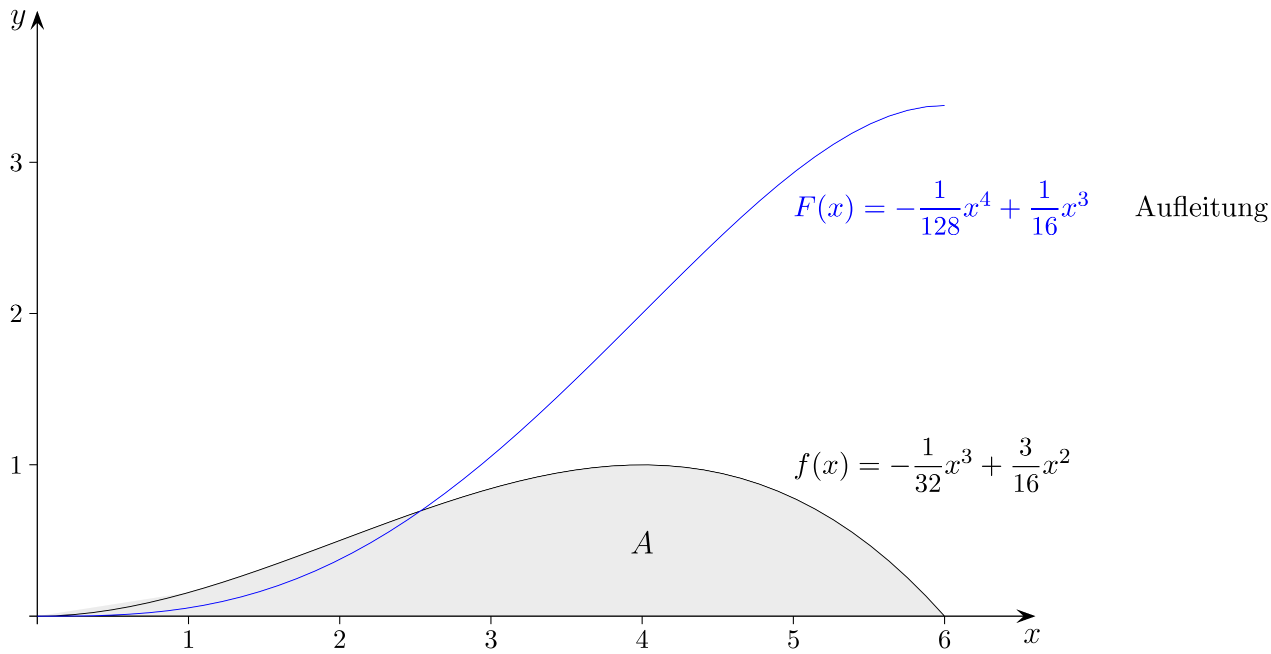
$A = ?$

Flächenberechnung



$$A = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Linke Grenze steht unten.



$$A = \int_0^6 \left(-\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{16}x^3\right]_0^6 = \ldots = \frac{27}{8}$$

↑ Aufleitung, Stammfunktion, unbestimmtes Integral

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - 6x^2 + 3x + 2$$

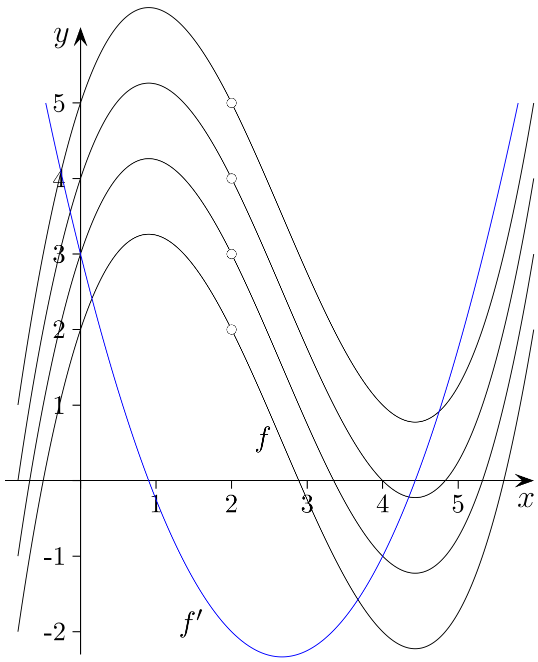
Zahl als Faktor bleibt erhalten.

Formel:
$f'(x) = x^n$
$f(x) = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}$

Probe: $(2x)' = 2$

$$\int f(x)\, dx = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}x^4 - 6 \cdot \tfrac{1}{3}x^3 + 3 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

$$= \tfrac{1}{8}x^4 - 2x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$$



Die Polynome 3. Grades (siehe Grafik) haben alle die Parabel als Ableitung.
Um umgekehrt von f' auf ein bestimmtes f zu schließen, muss ein Punkt vorgegeben sein, der auf dem Graphen von f liegt. Mit ihm wird C bestimmt.
Bei der Flächenberechnung bleibt C unberücksichtigt, es ist dann $C = 0$.
Die Konstante C ist bei der Ermittlung von Bestandsfunktionen von Bedeutung,
wenn der Anfangsbestand zur Zeit $t = 0$, also ein Punkt auf dem Graphen, vorgegeben ist.

Integralrechnung

Integration

Aufgaben zur Integralrechnung

Fläche zwischen zwei Graphen

GeoGebra

Integralfunktion

Untersumme

Obersumme

Startseite