Definitionsbereich und Asymptoten

Nach dem *größtmöglichen Definitionsbereich* kann z.B. bei Wurzelfunktionen wie

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \qquad \text{oder} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

gefragt werden.
Da reelle Wurzeln nur aus Zahlen, die größergleich Null sind, gezogen werden können, muss $4 - x^2 \geq 0$ sein. Durch Betrachten der Funktion $k(x) = 4 - x^2$ (nach unten geöffnete Parabel) und deren Nullstellen erhalten wir:

$$D_f = [-2; 2]$$

Bei der Funktion g kommt noch hinzu, dass der Nenner ungleich Null sein muss, daher gilt hier:

$$D_g =]-2; 2[$$

Die nach außen gerichteten eckigen Klammern besagen,
dass die Ränder -2 und 2 nicht zum Definitionsbereich gehören.

Definition:
Eine Gerade $g(x) = mx + b$ heißt *Asymptote* der Funktion f, falls

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{gilt.}$$

Eine Funktion kann zwei Asymptoten besitzen, $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ sind beides zu untersuchen. Der häufigste Fall ist, dass die Asymptote parallel zur x-Achse liegt. Die Asymptote wird dann durch die Bestimmung von $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ gewonnen. Allgemeiner gilt, da die direkte Anwendung der Definition häufig zu komplexen Rechnungen führt:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{und} \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

1. Beisp. $\quad f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 9}} \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = 3 \qquad$ As: $\quad y = 3$

2. Beisp. $\quad$ Zeige, dass $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ die Asymptote $y = x$ hat.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = 0$$