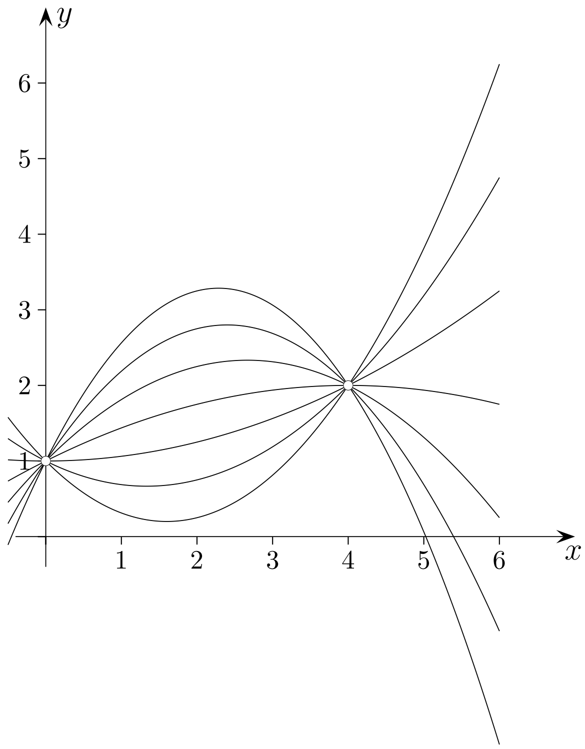
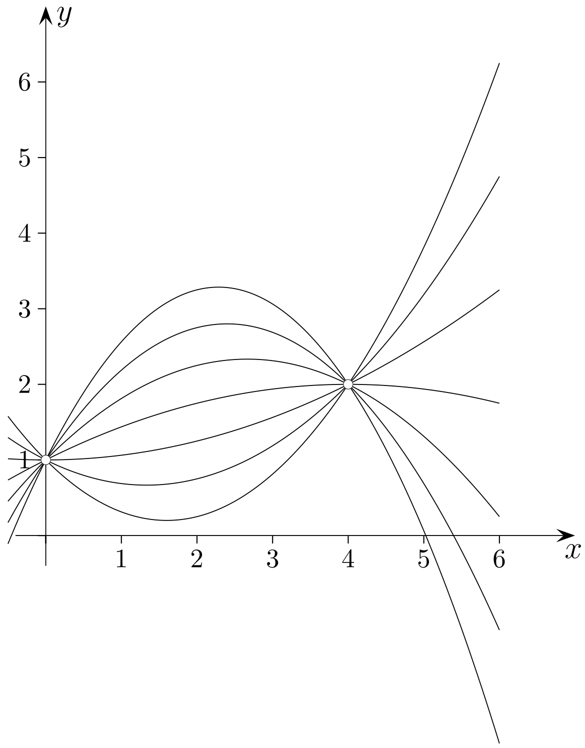
Bestimmung einer ganzrationalen Funktionenschar



Gesucht ist eine Schar f_a ganzrationaler Funktionen 2. Grades, deren Graphen durch $A(0\,|\,1)$ und $B(4\,|\,2)$ verlaufen und in A die Steigung a haben.

Funktionenschar

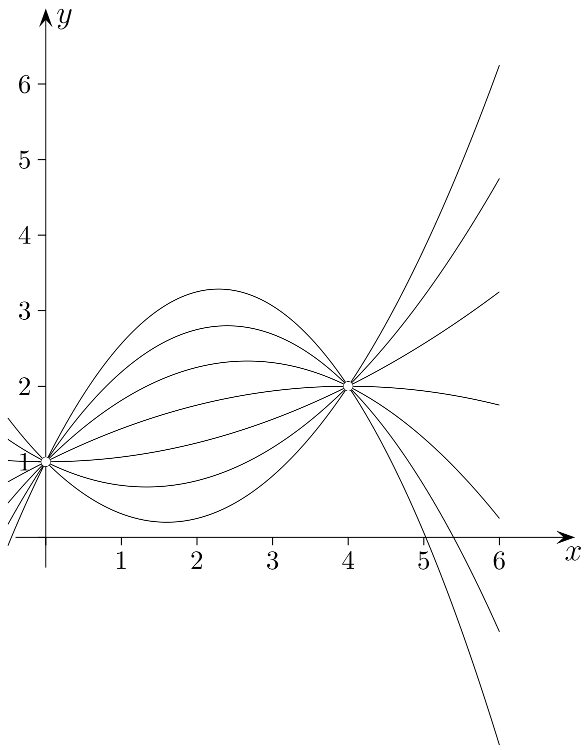


Gesucht ist eine Schar f_a ganzrationaler Funktionen 2. Grades, deren Graphen durch $A(0\,|\,1)$ und $B(4\,|\,2)$ verlaufen und in A die Steigung a haben.

Der Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ wäre falsch.
a hat in der Aufgabe eine andere Bedeutung.

$f_a(x) = (-\frac{1}{4}a + \frac{1}{16})x^2 + ax + 1$

Gemeinsame Punkte (der Graphen) einer Funktionenschar



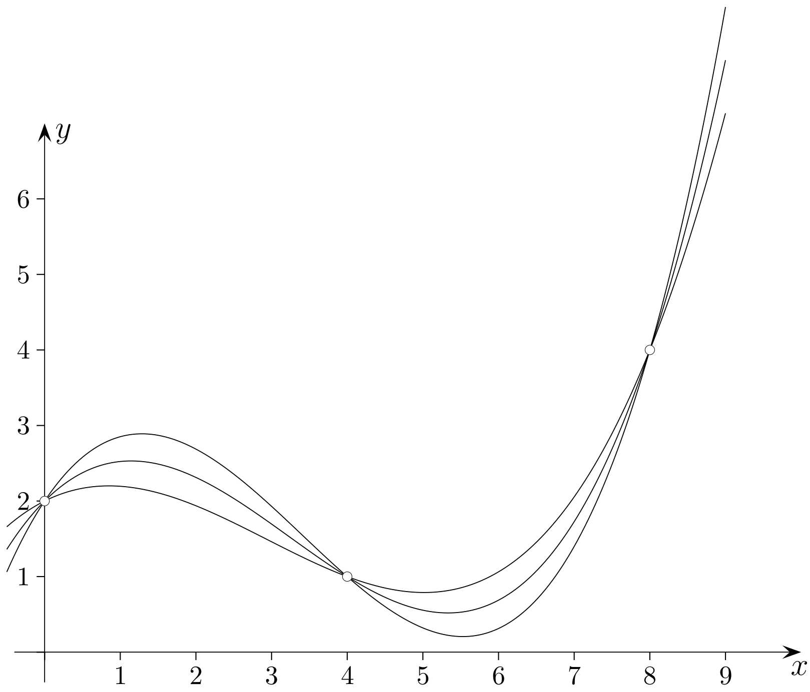
Gegeben sei (umgekehrt) die Funktionenschar $f_a(x) = (-\frac{1}{4}a + \frac{1}{16})x^2 + ax + 1$.
An welchen Stellen liegen gleiche Funktionswerte vor?

Die Stellen gemeinsamer Punkte können durch Lösen der Gleichung

$$-\frac{1}{4}ax^2 + ax = 0$$

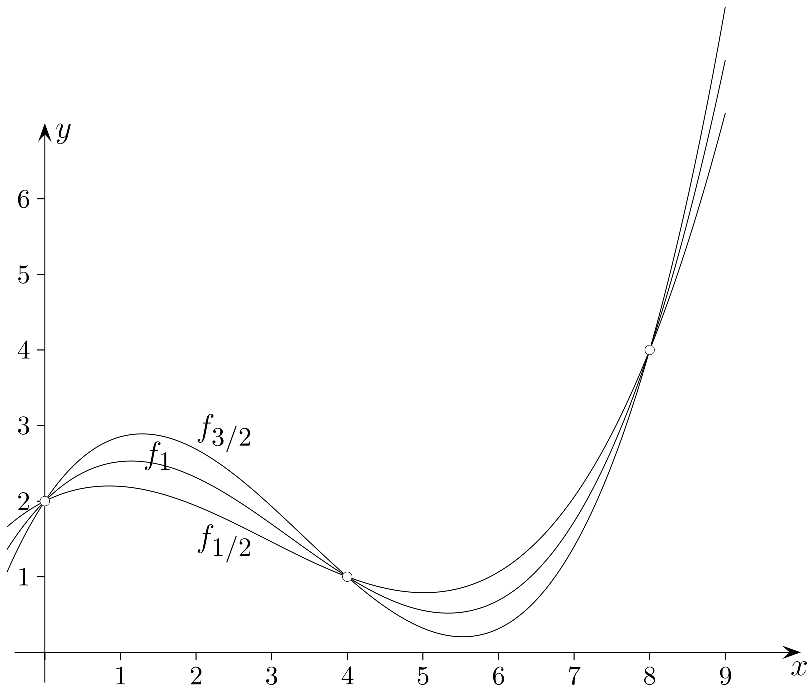
ermittelt werden.
Für diese x-Werte fällt a heraus, die Funktionswerte sind daher von a unabhängig.
$x_1 = 0,\ x_2 = 4$

Funktionenschar



Gesucht ist eine Schar f_a ganzrationaler Funktionen 3. Grades, deren Graphen durch $A(0\,|\,2)$, $B(4\,|\,1)$ und $C(8\,|\,4)$ verlaufen und in A die Steigung a haben.

Funktionenschar



Gesucht ist eine Schar f_a ganzrationaler Funktionen 3. Grades, deren Graphen durch $A(0\,|\,2)$, $B(4\,|\,1)$ und $C(8\,|\,4)$ verlaufen und in A die Steigung a haben.

$$f_a(x) = (\tfrac{1}{32}a + \tfrac{3}{128})x^3 - (\tfrac{3}{8}a + \tfrac{5}{32})x^2 + ax + 2$$

Wäre die Funktionenschar f_a gegeben, könnten die Stellen gemeinsamer Punkte durch Lösen der Gleichung

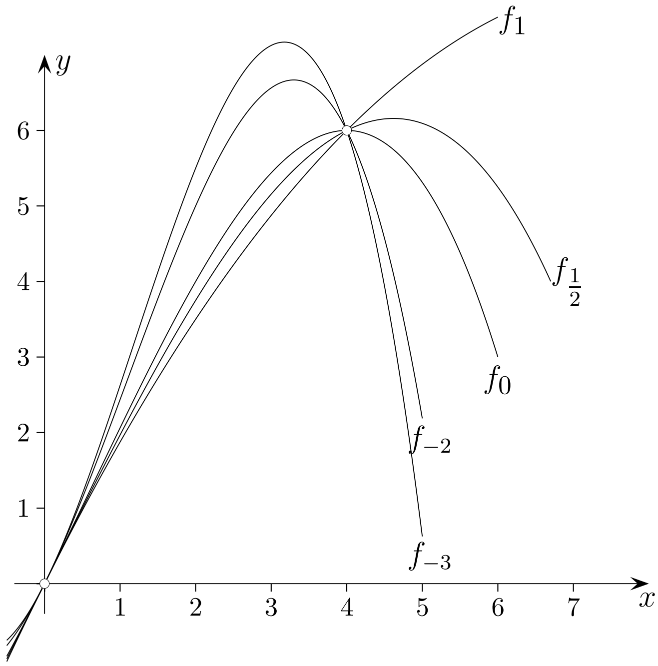
$$\tfrac{1}{32}ax^3 - \tfrac{3}{8}ax^2 + ax = 0$$

gefunden werden.
Für diese x-Werte fällt a heraus, die Funktionswerte sind daher von a unabhängig.

Funktionenschar

Gesucht ist eine Schar f_m ganzrationaler Funktionen, deren Graphen durch $A(4\,|\,6)$ verlaufen, in A die Steigung m haben und deren Tangente im Ursprung $y = 2x$ lautet.
Für welches m beträgt der Inhalt unter dem Graphen von f_m in den Grenzen von 0 bis 4 14 FE?

Funktionenschar



Gesucht ist eine Schar f_m ganzrationaler Funktionen, deren Graphen durch $A(4\,|\,6)$ verlaufen, in A die Steigung m haben und deren Tangente im Ursprung $y = 2x$ lautet.
Für welches m beträgt der Inhalt unter dem Graphen von f_m in den Grenzen von 0 bis 4 14 *FE*?

$f_m(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

Zwischenergebnis:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & c & = & 2 \\ 2. & 32a + 8b & = & -1 \\ 3. & 48a + 8b & = & m - 2 \end{array}$$

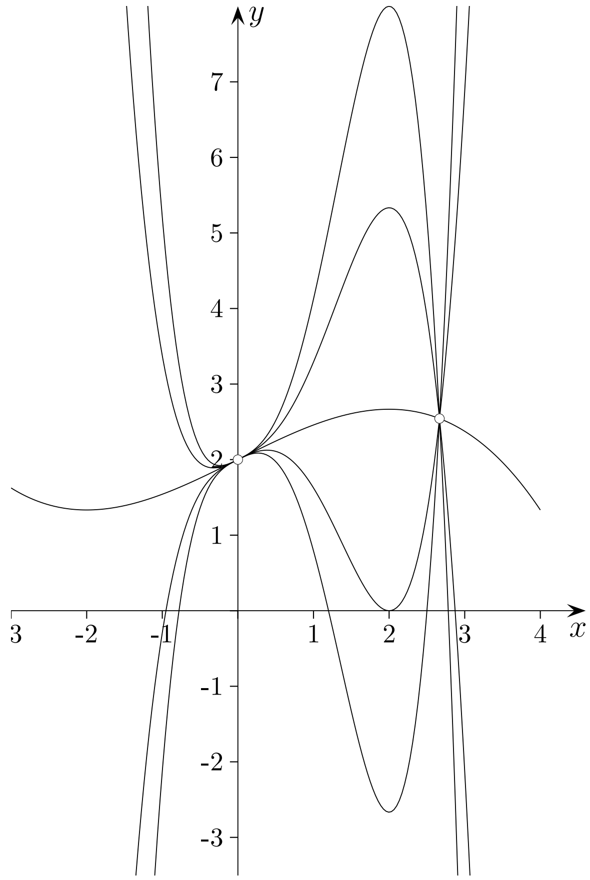
$f_m(x) = \frac{1}{16}(m-1)x^3 + \frac{1}{8}(-2m+1)x^2 + 2x$

$m = \frac{1}{2}$

Ergänzung

Zeige, dass die Funktionenschar f_m mit der Schar $g_a(x) = ax^3 + (-4a - \frac{1}{8})x^2 + 2x$ übereinstimmt.

Funktionenschar



Gesucht ist eine Schar $f_a(x) = ax^4 + bx^3 + cx + d$ ganzrationaler Funktionen, deren Graphen im Wendepunkt $A(0 \mid 2)$ die Steigung $m = \dfrac{1}{2}$ haben und an der Stelle $x = 2$ eine waagerechte Tangente.

Es sind die Graphen von f_{-1}, $f_{-0,5}$, f_0, $f_{0,5}$ und f_1 dargestellt.
Ordne die Graphen zu.
Weise nach, dass alle Graphen an der Stelle $x = \dfrac{8}{3}$ einen gemeinsamen Punkt haben.

Die Bedingungen

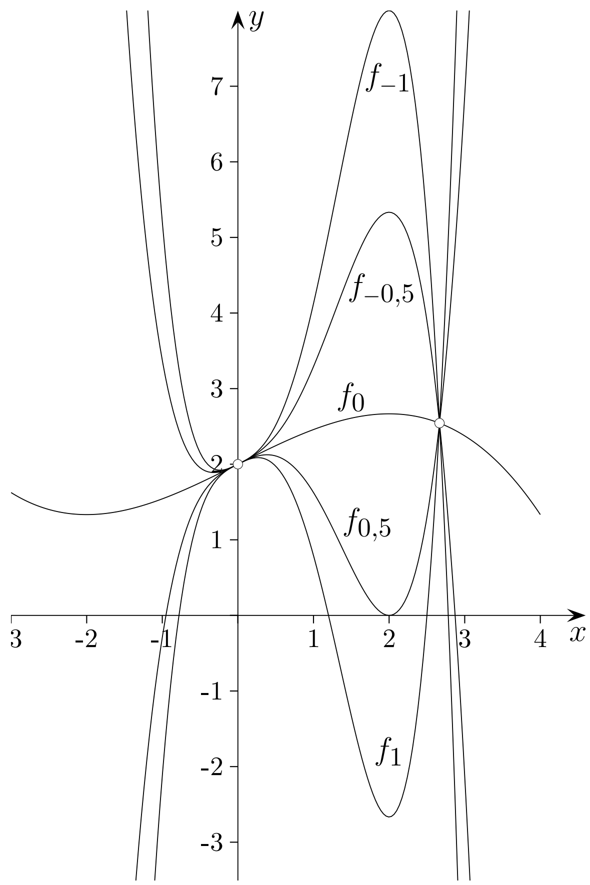
$$\begin{array}{rrcl} 1. & f(0) & = & 2 \\ 2. & f''(0) & = & 0 \\ 3. & f'(0) & = & \frac{1}{2} \\ 4. & f'(2) & = & 0 \end{array}$$

führen zum Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcl} 1. & d & = & 2 \\ 2. & 0 & = & 0 \\ 3. & c & = & \frac{1}{2} \\ 4. & 32a + 12b + c & = & 0 \end{array}$$

und der Lösungsfunktion: $f_a(x) = ax^4 - (\frac{8}{3}a + \frac{1}{24})x^3 + \frac{1}{2}x + 2$

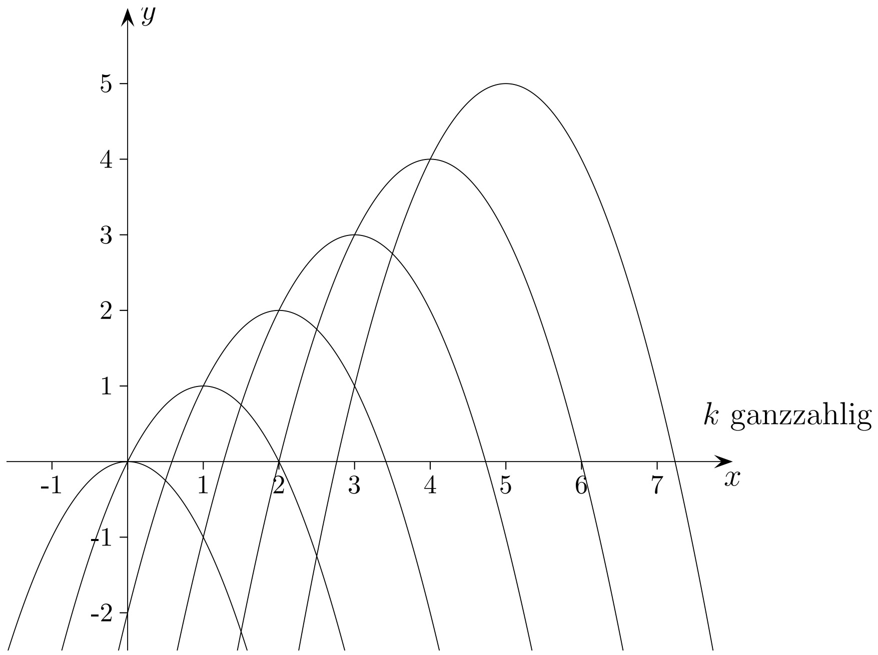
Beachte für die Zuordnung: $\lim\limits_{x\to\infty}(ax^4 - \ldots) = \pm\infty$, für $a > 0$ gilt ..., für $a < 0$ ...



Dass an der Stelle $x = \frac{8}{3}$ ein gemeinsamer Punkt vorliegt, ist unmittelbar zu sehen:
Für diesen x-Wert fällt a heraus, der Funktionswert ist daher von a unabhängig.
$ax^4 = \frac{8}{3}ax^3 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{8}{3}$

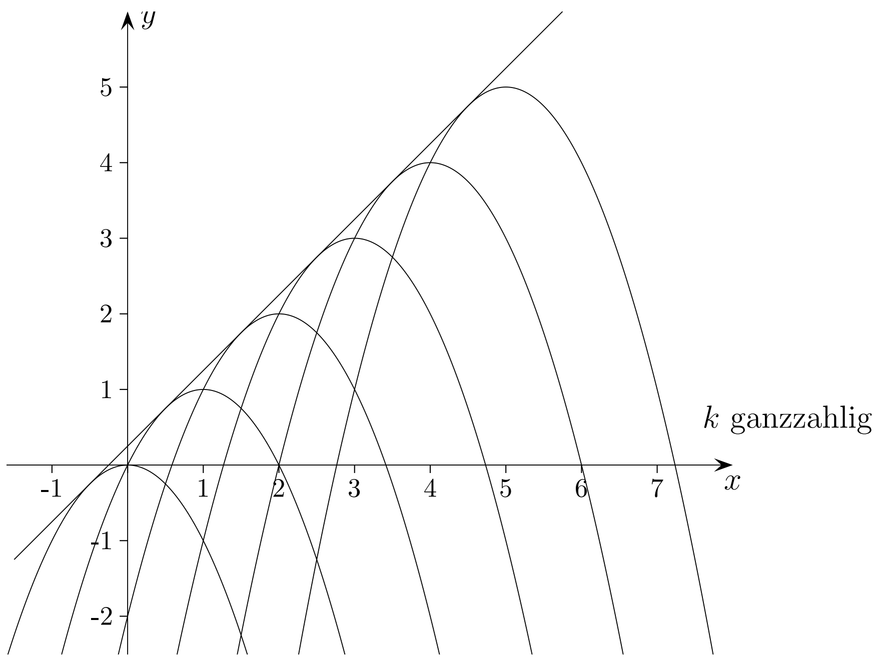
Gemeinsame Tangente

Zeige, dass die Funktionenschar $f_k(x) = -(x-k)^2 + k$ eine gemeinsame Tangente besitzt.



Gemeinsame Tangente

Zeige, dass die Funktionenschar $f_k(x) = -(x-k)^2 + k$ eine gemeinsame Tangente besitzt.



Mehrere Vorgehensweisen sind möglich.

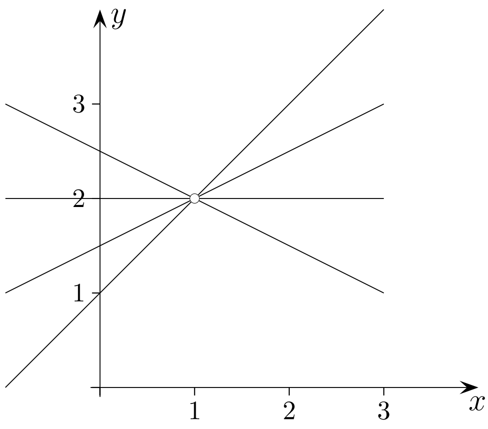
a) Die Parabelscheitel $S(k \mid k)$ sind unmittelbar aus der Scheitelform zu erkennen, so dass die Vermutung $m = 1$ naheliegt. Weiter kann untersucht werden, an welcher Stelle $f_0(x) = -x^2$ die Steigung $m = 1$ hat. Die zugehörige Tangente $y = x + \frac{1}{4}$ erweist sich als gemeinsame Tangente.

b) Für f_k lautet die Gleichung der Tangente an der Stelle a: $t_k(x) = \underbrace{(2k-2a)}_{C_1}x + \underbrace{a^2 - k^2 + k}_{C_2}$

Für eine gemeinsame Tangente müssen C_1 und C_2 von k unabhängig sein.
Dies führt zu (Einsetzen und Koeffizientenvergleich) $C_1 = 1$ und $C_2 = \frac{1}{4}$.

c) Die gemeinsame Tangente ist Einhüllende der Parabelschar.
Für die Berechnung der Hüllfunktion wird die Ableitung nach k von $f(k) = -(x-k)^2 + k$ gleich null gesetzt, $f(k)$ ist eine Funktion mit der Variablen k, die Stelle x wird als konstant (Parameter) betrachtet. Das Ergebnis $k = x + \frac{1}{2}$ wird in $f_k(x)$ eingesetzt.
Für $h(x) = x + \frac{1}{4}$ ist abschließend die Berührbeziehung zu überprüfen.
Die Berechnung von Hüllfunktionen wird in Ni nicht verlangt.

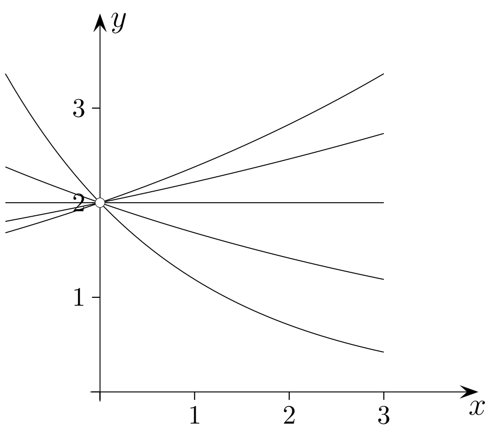
Gemeinsame Punkte



$$\begin{aligned} y &= (2-k)\cdot x + k \\ &= 2x - kx + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -kx + k \\ x &= 1 \qquad P(1 \mid 2) \end{aligned}$$

Wenn es einen gemeinsamen Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ gibt, kann y_0 nicht von k abhängen.
x_0 ist so zu wählen, dass der kleinste Term, der x_0 und k enthält, herausfällt (null ergibt).



$$\begin{aligned} f_k(x) &= 2^{1-kx} \\ kx &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \qquad P(0 \mid 2)$$