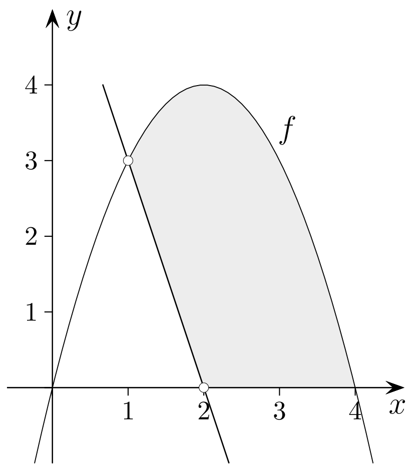
Integralrechnung gA

1. Der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ und die Gerade $y = -x$ schließen die Fläche A ein.
   Berechne die Größe von A <u>ohne</u> GTR.

2. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$
   schließt mit der x-Achse die Fläche A ein.
   Berechne die Größe von A <u>ohne</u> GTR.

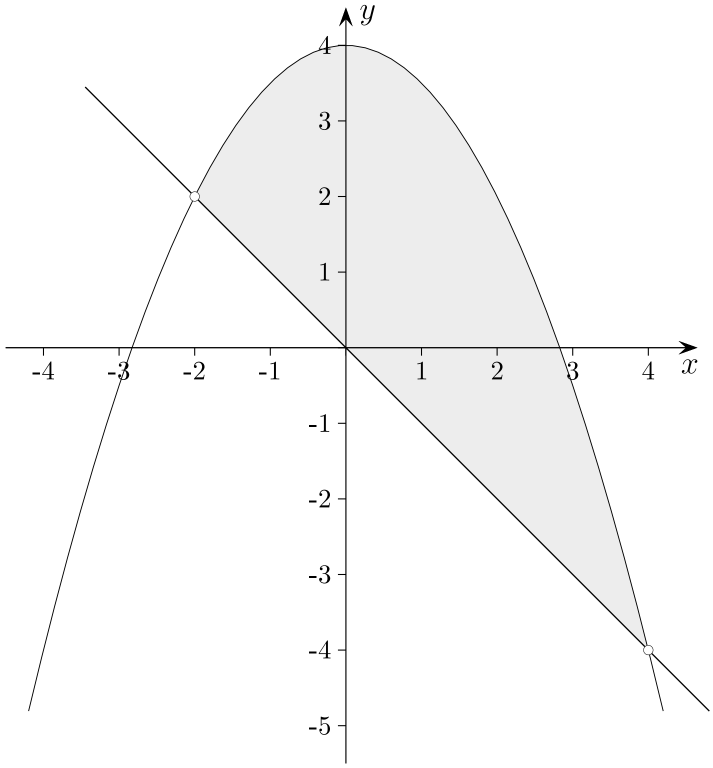
3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -ax^2 + 4ax, \quad a > 0.$
   Der Graph schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.
   Wie ist das a zu wählen, damit diese Fläche den Inhalt 8 FE hat?

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 4x$.
   Berechne die Größe der grau gefärbten Fläche <u>ohne</u> GTR.



5. Der Zu- bzw. Abfluss für ein Wasserbecken wird durch die Änderungsratenfunktion $f(x) = x^3 - 15x^2 + 54x,\ 0 \leq x \leq 9,$ beschrieben, $f(x)$ in m^3 pro Stunde, x in Stunden. Zu Beginn befinden sich 5 m^3 Wasser im Becken (Bearbeitung mit/ohne GTR).
   a) Geben Sie die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu- noch abläuft.
   b) Skizziere die Graphen der Änderungsratenfunktion und der Bestandsfunktion.
   c) Wie viel Wasser befindet sich nach 9 Stunden im Becken?

1. Der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ und die Gerade $y = -x$ schließen die Fläche A ein.
   Berechne die Größe von A <u>ohne</u> GTR.

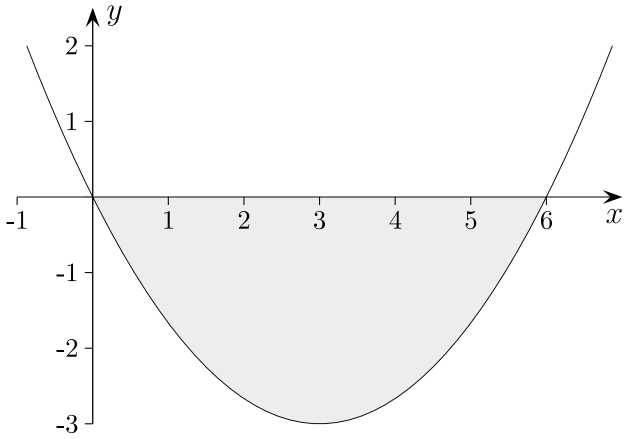


Schnittstellen Bed. $f(x) = -x$

Das ergibt eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$

$$A = \int_{-2}^{4} \big(f(x) - (-x)\big)\,dx = \int_{-2}^{4} \big(-\frac{1}{2}x^2 + 4 + x\big)\,dx = \Big[-\frac{1}{6}x^3 + 4x + \frac{1}{2}x^2\Big]_{-2}^{4} = \ldots = \frac{40}{3} - (-\frac{14}{3}) = 18$$

2. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$ schließt mit der x-Achse die Fläche A ein. Berechne die Größe von A <u>ohne</u> GTR.



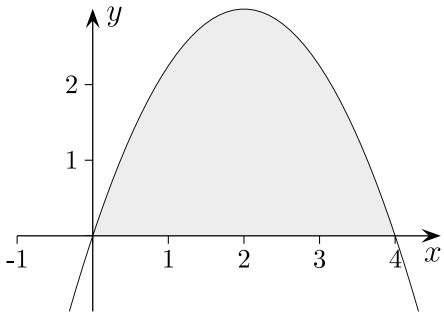
Nullstellen Bed. $f(x) = 0$

Das ergibt eine einfache quadratische Gleichung (x ausklammern)
mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$.

$$A = \int_0^6 \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - x^2\right]_0^6 = \ldots = -12$$ Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse.

Die Größe der Fläche beträgt 12 FE (Flächeneinheiten)

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -ax^2 + 4ax, \quad a > 0$.
   Der Graph schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.
   Wie ist das a zu wählen, damit diese Fläche den Inhalt 8 FE hat?

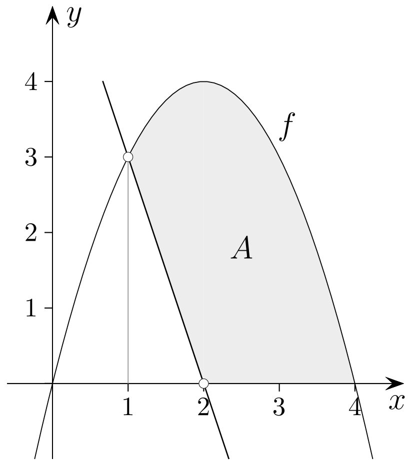


Nullstellen Bed. $f(x) = 0$

Das ergibt eine einfache quadratische Gleichung (x ausklammern)
mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

$A = \int\limits_0^4 \big(-ax^2 + 4ax\big)\,dx = \Big[-\frac{a}{3}x^3 + 2ax^2\Big]_0^4 = \frac{32a}{3} = 8$ Nach a umgestellt ergibt das $a = \frac{3}{4}$.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 4x$.
   Berechne die Größe der grau gefärbten Fläche <u>ohne</u> GTR.



Nullstellen Bed. $f(x) = 0$

Das ergibt eine einfache quadratische Gleichung (x ausklammern)
mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

$$A = \int_1^4 f(x)\,dx - A_{\text{Dreieck}} = \Big[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \Big]_1^4 - \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{32}{3} - \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \ldots = \frac{15}{2}$$

5. Der Zu- bzw. Abfluss für ein Wasserbecken wird durch die Änderungsratenfunktion $f(x) = x^3 - 15x^2 + 54x,\ 0 \leq x \leq 9,$ beschrieben, $f(x)$ in m^3 pro Stunde, x in Stunden. Zu Beginn befinden sich 5 m^3 Wasser im Becken (Bearbeitung mit/ohne GTR).

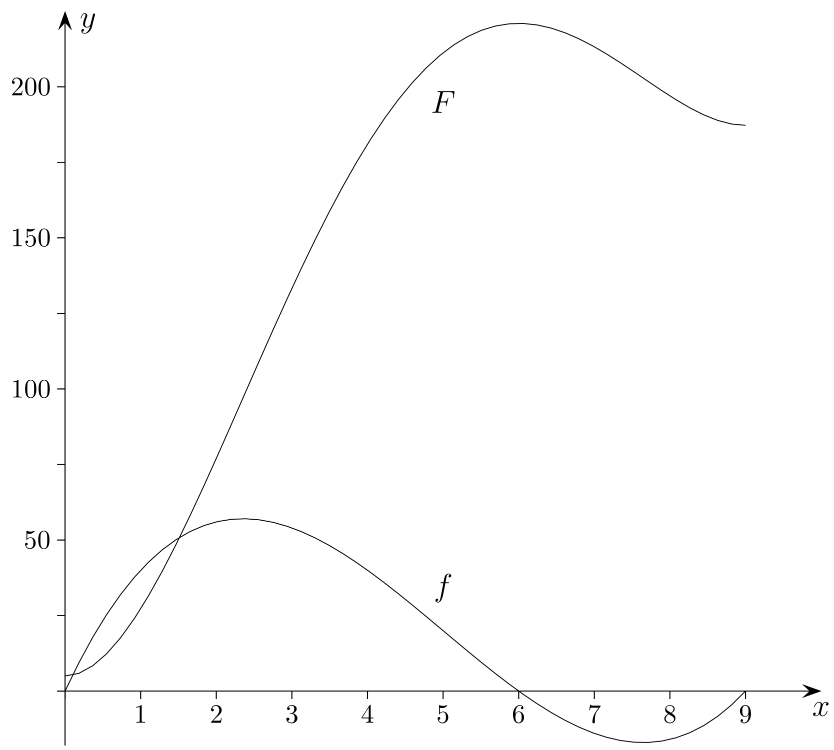
   a) Geben Sie die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu- noch abläuft.

   Bed. $f(x) = 0$, x ausklammern, $x_1 = 0$, quadr. Gleichung, $x_2 = 6$, $x_3 = 9$

   b) Skizziere die Graphen der Änderungsratenfunktion und der Bestandsfunktion.

   c) Wie viel Wasser befindet sich nach 9 Stunden im Becken?

   $$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 5x^3 + 27x^2 + C,\ F(0) = 5,\ C = 5,\ F(9) = \frac{749}{4} = 187{,}25\ [\text{m}^3]$$



Bei vielen Aufgaben geht es um einen Bestand (z. B. eine Temperatur, eine Wassermenge im Behälter, die Verkaufsmenge eines Produktes, die Länge einer zurückgelegten Strecke, die Höhe einer Pflanze, ...) und die Änderung von diesem Bestand (die Temperaturzu- oder -abnahme, die Zunahme oder Abnahme eines Wasserbestands, die Änderungsrate der Verkaufsmenge, die Geschwindigkeit, das Höhenwachstum, ...).
Die Funktion, die die Änderung beschreibt, ist die Ableitung der Bestandsfunktion F.
Ist die Änderungsratenfunktion f gegeben, so ist für die Bestandsfunktion F die Aufleitung (Stammfunktion) von f zu bilden, $F(x) = \int f(x)\,dx + C$.

C wird mit der Anfangsbedingung $F(0) = a$ bestimmt, die den Bestand a zur Zeit $x = 0$ angibt.

Statt der Variablen x für die Zeit wird im allgemeinen t verwendet.

Beispiel

$f(x) = \frac{1}{3}(16x^3 - 104x^2 + 160x + 240)$

Geschwindigkeit, $f(x)$ in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, x in h
Der Definitionsbereich für f sei das Intervall $[0, 4]$.

$F(x) = \frac{1}{3}(4x^4 - \frac{104}{3}x^3 + 80x^2 + 240x) + C$

Stammfunktion, $F(x)$ in km

$F(0) = 120$

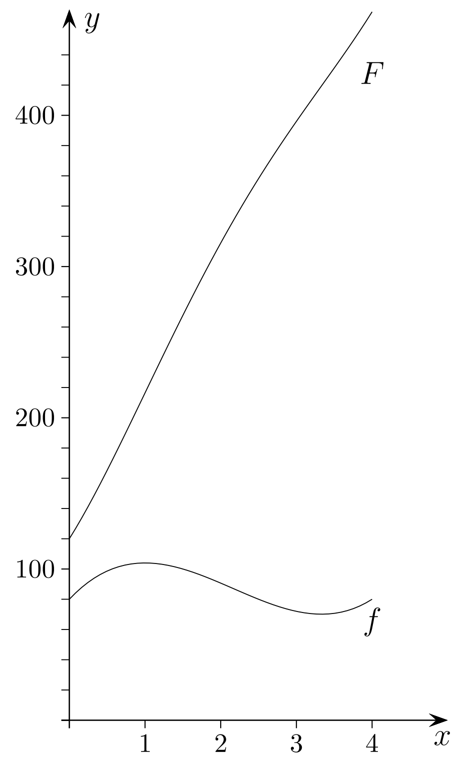
Zur Zeit $x = 0$ wurden schon 120 km zurückgelegt.

$F(x) = \frac{1}{3}(4x^4 - \frac{104}{3}x^3 + 80x^2 + 240x) + 120$

Die Bestandsfunktion beschreibt den Zusammenhang von verstrichener Zeit und zurückgelegter Gesamtstrecke, Weg/Zeit-Funktion.

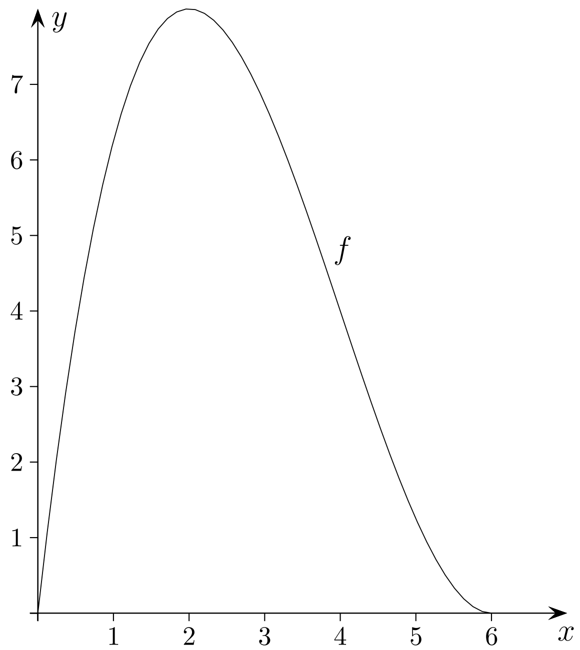
$F(4) \approx 468{,}44$ [km]

zum Beispiel



Wachstumsgeschwindigkeit

Die Funktion $f(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t$ beschreibt näherungsweise die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze in der Einheit $\frac{\text{cm}}{\text{Woche}}$. Dabei gibt t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn an, es gilt $0 \leq t \leq 6$.



Nehme an, die Pflanze hätte nach 4 Wochen eine Höhe von 30 cm.
Entscheide begründet ohne Rechnung, ob die Pflanze nach 5 Wochen kleiner als/gleich/größer als 34 cm ist.

Zu Beginn der Beobachtung war die Pflanze 6 cm hoch.
Berechne nun die Höhe der Pflanze nach 5 Wochen.

Aus dem Graphen kann man ablesen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Wochen 4 cm pro Woche beträgt und danach nur noch fällt. Also ist die Pflanze nach 5 Wochen kleiner als 34 cm.

Nach 5 Wochen beträgt die Höhe ca. 32,6 cm.

Durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate

Beispiel

$f(x) = \frac{1}{3}(16x^3 - 104x^2 + 160x + 240)$ — Geschwindigkeit, $f(x)$ in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, x in h
Definitionsbereich $[0, 4]$

$F(x) = \frac{1}{3}(4x^4 - \frac{104}{3}x^3 + 80x^2 + 240x) + C$ — Stammfunktion, $F(x)$ in km

$F(0) = 120$ — Zur Zeit $x = 0$ wurden schon 120 km zurückgelegt.

$F(x) = \frac{1}{3}(4x^4 - \frac{104}{3}x^3 + 80x^2 + 240x) + 120$ — Die Bestandsfunktion beschreibt den Zusammenhang von verstrichener Zeit und zurückgelegter Gesamtstrecke, Weg/Zeit-Funktion.

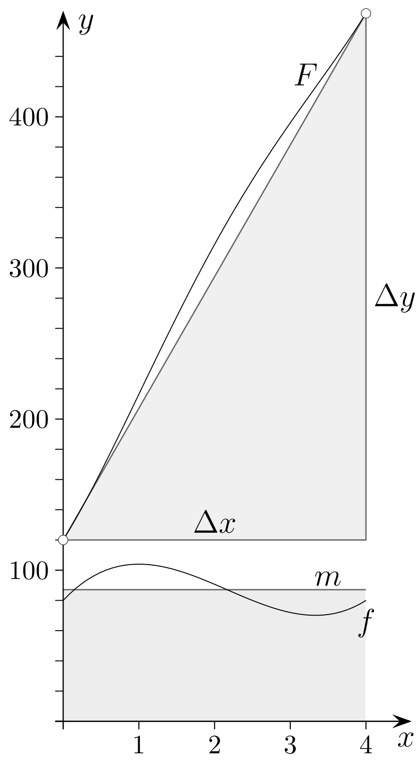
$F(4) \approx 468{,}44$ [km] — zum Beispiel

Die durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate m von F auf dem Intervall $[a, b]$ kann mit f oder F ermittelt werden:

$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ — Der Inhalt des Rechtecks ist gleich dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f. m ist ein mittlerer Funktionswert von f.

$= \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$ — Sekantensteigung von F (Bestandsfunktion)

$= \frac{\Delta y}{\Delta x}$

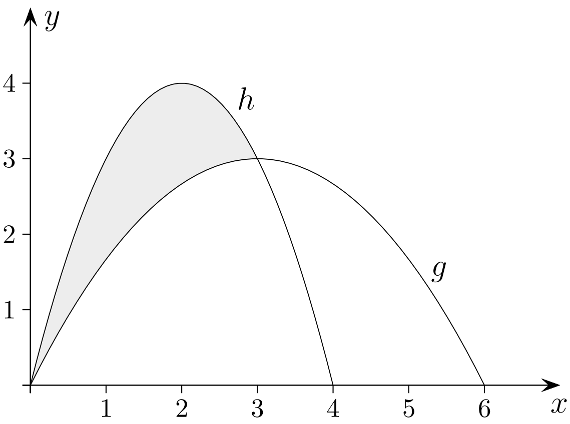


Durchschnittliche Änderungsrate m von F für das Beispiel auf dem Intervall $[0; 4]$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{468{,}444 - 120}{4 - 0} = 87{,}111$$

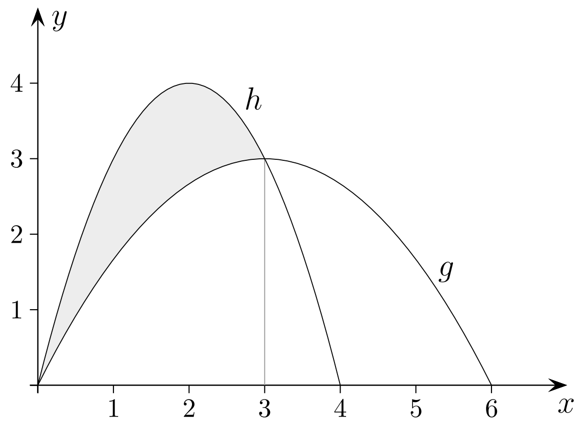
Änderungsrate und Fläche zwischen Graphen

Die Funktionen $h(x) = -x^2 + 4x$ und $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ beschreiben die Änderungsraten der Größen H und G in der Einheit $\frac{\text{Liter}}{\text{Tag}}$. Dabei gibt x die Zeit in Tagen seit Beobachtungsbeginn an, es gilt $0 \leq t \leq 4$.
Berechne und interpretiere die Bedeutung der von den Graphen zwischen den Schnittpunkten eingeschlossenen Fläche.



Änderungsrate und Fläche zwischen Graphen

Die Funktionen $h(x) = -x^2 + 4x$ und $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ beschreiben die Änderungsraten der Größen H und G in der Einheit $\frac{\text{Liter}}{\text{Tag}}$. Dabei gibt x die Zeit in Tagen seit Beobachtungsbeginn an, es gilt $0 \leq t \leq 4$.
Berechne und interpretiere die Bedeutung der von den Graphen zwischen den Schnittpunkten eingeschlossenen Fläche.



Schnittstellen Bed. $h(x) = g(x), \quad h(x) - g(x) = 0, \quad -\frac{2}{3}x^2 + 2x = 0$

Die quadratische Gleichung (x ausklammern)
hat die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

$$A = \int_0^3 \Big(-\frac{2}{3}x^2 + 2x\Big)\, dx = \Big[-\frac{2}{9}x^3 + x^2 \Big]_0^3 = \ldots = 3$$

Die Größe der Fläche beträgt 3 FE (Flächeneinheiten)

Mit $\int_0^3 h(x)\, dx$ wird der Bestand H zum Zeitpunkt $x = 3$ berechnet, mit $\int_0^3 g(x)\, dx$ der Bestand G zum Zeitpunkt $x = 3$. Die Differenz der Bestände entspricht der eingeschlossenen Fläche und beträgt 3 Liter, $H(3) = G(3) + 3$.

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion f 3. Grades, deren Graph durch den Ursprung und durch die Punkte $A\big(3 \mid 4\big)$ und $B\big(-3 \mid -4\big)$ verläuft und in A eine waagerechte Tangente hat.

Ermittle die Nullstellen, den Hoch- und Tiefpunkt des Graphen von f.

Ermittle die Größe der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Ein GTR wird nicht benötigt.

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion f 3. Grades, deren Graph durch den Ursprung und durch die Punkte $A(3\,|\,4)$ und $B(-3\,|\,-4)$ verläuft und in A eine waagerechte Tangente hat.

Ermittle die Nullstellen, den Hoch- und Tiefpunkt des Graphen von f.

Ermittle die Größe der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

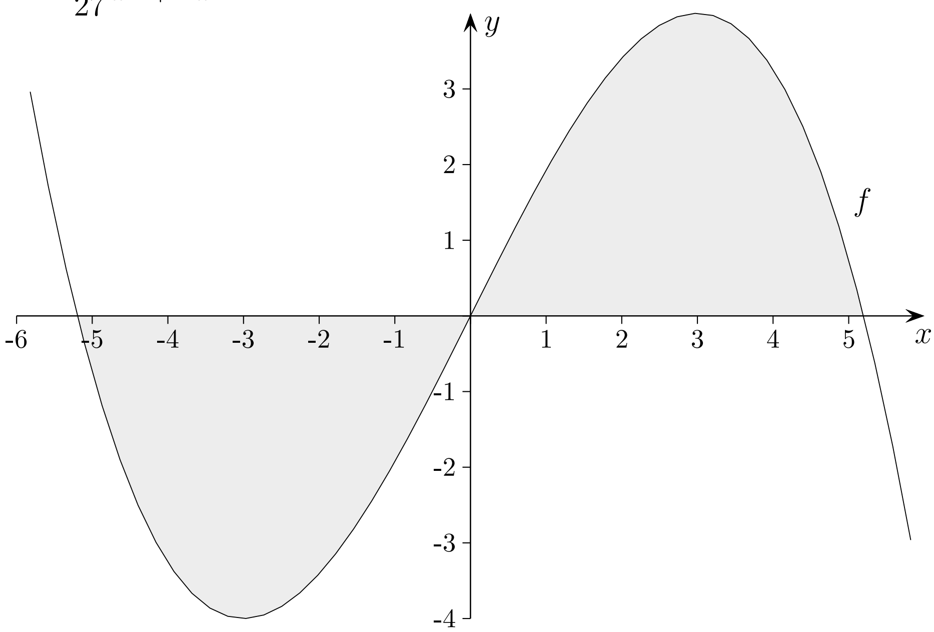
Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bedingungen:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & f(0) & = & 0 \\ 2. & f(3) & = & 4 \\ 3. & f(-3) & = & -4 \\ 4. & f'(3) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} 1. & d & = & 0 & \\ 2. & 27a + 9b + 3c & = & 4 & \\ 3. & -27a + 9b - 3c & = & -4 & \mid 2. + 3., \quad \text{es folgt } b = 0 \\ 4. & 27a + 6b + c & = & 0 & \mid 3. + 4., \quad \text{es folgt } c = 2, \quad \text{in 2. eingesetzt: } a = -\dfrac{2}{27} \end{array}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = -\dfrac{2}{27}x^3 + 2x$

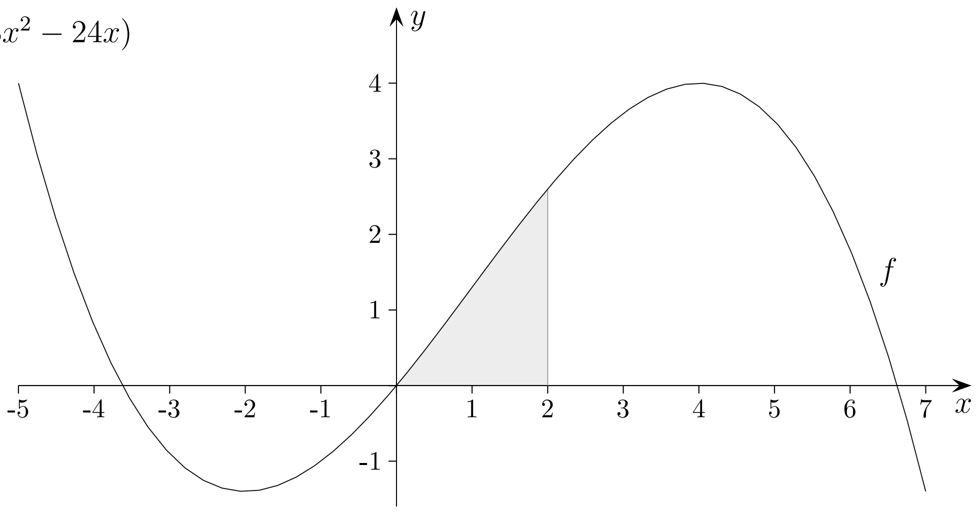


Punktsymmetrie beachten. Der Ansatz $f(x) = ax^3 + cx$ wäre sinnvoll gewesen.

Nullstellen: $x_1 = 0,\ \ x_{2/3} = \pm\sqrt{27},\ \ f'(x) = -\dfrac{2}{9}x^2 + 2,\ \ f'(x) = 0,\ \ x^2 = 9,\ \ H(3\,|\,4),\ \ T(-3\,|\,-4)$

$$A = 2\int_0^{\sqrt{27}} \left(-\frac{2}{27}x^3 + 2x\right)dx = 2\left[-\frac{1}{54}x^4 + x^2\right]_0^{\sqrt{27}} = \ldots = 27$$

Gegeben $f(x) = -\frac{1}{20}(x^3 - 3x^2 - 24x)$



Berechne ohne GTR die Nullstellen, den Hochpunkt, den Tiefpunkt und die Fläche unterhalb des Graphen von f in den Grenzen von 0 bis 2.

Nullstellen: $x_1 = 0, \;\; x_{2/3} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{105}}{2}$

$$f'(x) = -\frac{1}{20}(3x^2 - 6x - 24), \;\; f'(x) = 0, \;\; 3x^2 - 6x - 24 = 0, \;\; x^2 - 2x - 8 = 0, \;\; x_1 = 4, \;\; x_2 = -2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{20}(6x - 6) = -\frac{1}{10}(3x - 3), \;\; f''(4) = -\frac{9}{10}, \;\; H\big(4 \mid 4\big), \;\; f''(-2) = \frac{9}{10}, \;\; T\big(-2 \mid -\frac{7}{5}\big)$$

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{20}\int_0^2 (x^3 - 3x^2 - 24x)\,dx = -\frac{1}{20}\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 12x^2\right]_0^2 = \frac{13}{5}$$

Kurvendiskussion 1

Kurvendiskussion 2

Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Startseite